Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 PARA PRATICAR – DEZEMBRO DE 2005

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página, o aspecto da última página (com formulário) e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, y > 0\} \ .$$

(a) Exiba uma parametrização global de X.

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de X e densidade de massa $f(x, y, z) = 1 + z$.

(2) Considere as variedades $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, -1 < z < 1\}$ e $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - z^2, -1 < z < 1\}$. Seja F o campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (x, y, -2z)$.

   (a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de A segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, 1, 0) = (0, -1, 0)$.

   (b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de F através de B segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, 2, 0) = (0, 1, 0)$.

(3) Considere o domínio seccionalmente regular $A = \{(x, y, z) \in X : y > 0, z < 1\}$ na variedade $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ e o campo $F(x, y, z) = (z, y, x - z)$.

(a) Escolha uma orientação o de X e parametrize ∂A respeitando a orientação induzida por o.

(b) Usando o teorema de Stokes clássico, calcule o fluxo de F através de A no sentido da normal unitária ν cuja terceira componente é negativa.

(4) Considere a forma diferencial

$$\omega = \frac{3y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{3x}{x^2+y^2}\,dy + 4\,dz\ .$$

(a) Calcule $\int_{C^o} \omega$ onde C é a circunferência no plano xy de raio 1, centro na origem, com orientação o do sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$, e diga se ω é ou não uma forma exacta no seu domínio.

(b) Calcule $\int_{E^o} \omega$ onde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 = 36, z = 0\}$ com orientação o do sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^o} \omega = \int_{A^o} d\omega$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i^{o+}} (M\,dx + N\,dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu\, dV_2 = \int_A \mathrm{div\,F\,dV_3}$$

$$\int_\gamma F = \int_A \mathrm{rot\,F} \cdot \nu\, \mathrm{dV_2}$$