

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 – 12 DE DEZEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: _____

Nome: _____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y = 1 - x^2 - z^2, z > 0\} .$$

(a) Exiba uma parametrização global de X .

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de X e densidade de massa

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4z^2}} .$$

- (2) Seja F o campo vectorial dado por $F(x, y, z) = (y, y, -z)$ e considere as variedades $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, z = 1\}$ e $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z > 1\}$ em \mathbb{R}^3 .
- (a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de A segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.
- (b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de F através de B segundo a normal unitária n que satisfaz $n(0, 0, 2) = (0, 0, 1)$.

(3) Seja C o quadrado de vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ percorrido (uma vez) no sentido directo.

(a) Calcule

$$\int_C P dx + Q dy$$

onde $P(x, y) = 2xe^y + y^2$ e $Q(x, y) = x^2e^y - x + 1$.

(b) Calcule

$$\int_C (P + M) dx + (Q + N) dy$$

onde (P, Q) é como na alínea (a) e $F = (M, N)$ é um campo vectorial fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ para o qual $\int_\gamma F = 2\pi$ onde γ é a circunferência de raio 1 e centro na origem percorrida no sentido directo.

- (4) Seja A a porção do hiperbolóide $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ na faixa $\sqrt{\frac{5}{4}} < z < \sqrt{2}$.
- (a) Escolha uma orientação o de A e parametrize cada componente de ∂A em termos de uma coordenada angular respeitando a orientação induzida por o .
 - (b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} x \, dx \wedge dy$ onde o é a orientação que escolheu na alínea (a).

Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^\circ} \omega = \int_{A^\circ} d\omega$$
$$\sum_{i=1}^m \int_{C_i^{\circ+}} (M dx + N dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$
$$\int_{\partial A} F \cdot \nu dV_2 = \int_A \operatorname{div} F dV_3$$
$$\int_{\gamma} F = \int_A \operatorname{rot} F \cdot \nu dV_2$$