Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 – 12 DE DEZEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ________________

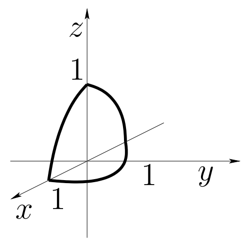
Nome: ____

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2, y > 0\} \ .$$

(a) Exiba uma parametrização global de X.

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de X e densidade de massa $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$.



Resolução:

(a) *A variedade X é uma porção do parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$. Por exemplo, uma parametrização usando coordenadas cilíndricas é*

$$G :]0, 1[\times]0, \pi[\longrightarrow X \ ,$$
$$G(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1 - \rho^2) \ .$$

(b) *A parametrização G da alínea anterior tem*

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} \times \frac{\partial G}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho)$$

$$\mathcal{J}G(\rho, \theta) = \left| \frac{\partial G}{\partial \rho} \times \frac{\partial G}{\partial \theta} \right| = \sqrt{4\rho^4 + \rho^2} = \rho\sqrt{1 + 4\rho^2} \ .$$

A massa da placa é

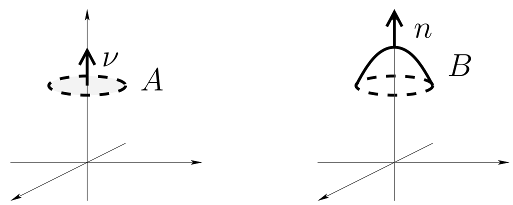
$$\begin{aligned} \int_X f \, dV_2 &= \int_0^1 \int_0^\pi \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+4\rho^2}}}_{f(G(\rho,\theta))} \underbrace{\rho\sqrt{1+4\rho^2}}_{\mathcal{J}G(\rho,\theta)} \, d\theta \, d\rho \\ &= \pi \int_0^1 \rho \, d\rho = \frac{\pi}{2} \ . \end{aligned}$$

$\square$

(2) Seja F o campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (x, -2y, z)$ e considere as variedades $A = \{(x,y,z) : x^2+y^2 < 1, z = 2\}$ e $B = \{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-2)^2 = 1, z > 2\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de A segundo a normal unitária ν que satisfaz $\nu(0,0,2) = (0,0,1)$.

(b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de F através de B segundo a normal unitária n que satisfaz $n(0,0,3) = (0,0,1)$.



Resolução:

(a) *Parametriza-se A usando coordenadas cilíndricas:*

$$g :]0,1[\times]0,2\pi[\longrightarrow A\,, \quad g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 2)\,.$$

Como o vector

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = (0,0,\rho)$$

é um múltiplo positivo de $(0,0,1)$, aponta no sentido de ν, o fluxo pedido é

$$\int_A F\cdot\nu\,dV_2 = \int_0^1\int_0^{2\pi} \underbrace{(\rho\cos\theta, -2\rho\sin\theta, 2)}_{F(g(\rho,\theta))} \cdot \underbrace{(0,0,\rho)}_{\frac{\partial g}{\partial \rho}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}}\,d\theta\,d\rho \; = 2\pi\int_0^1 2\rho\,d\rho = 2\pi\,.$$

(b) *Os fechos das superfícies A e B juntos formam a fronteira do domínio seccionalmente regular que é a meia bola $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-2)^2 < 1, z > 2\}$. A normal dada em (a) é interior a V, enquanto que a normal em (b) é exterior a V. Como $\operatorname{div} F(x,y,z) = 1-2+1 = 0$, aplicando o teorema da divergência tem-se*

$$-\int_A F\cdot\nu\,dV_2 + \int_B F\cdot n\,dV_2 = \int_V \operatorname{div} F\,dV_3 = 0\,.$$

Do resultado da alínea (a) conclui-se que

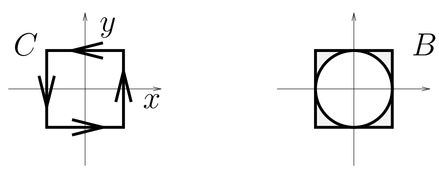
$$\int_B F\cdot n\,dV_2 = \int_A F\cdot\nu\,dV_2 = 2\pi\,.$$

$\square$

(3) Seja C o quadrado de vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$ percorrido (uma vez) no sentido directo.

(a) Calcule
$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$
onde $P(x,y) = y^2e^x + y$ e $Q(x,y) = 2ye^x + x^2 + 3$.

(b) Calcule
$$\int_C (P+M)\,dx + (Q+N)\,dy$$
onde (P,Q) é como na alínea (a) e $F = (M,N)$ é um campo vectorial fechado de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ para o qual $\int_\gamma F = 2\pi$ onde γ é a circunferência de raio 1 e centro na origem percorrida no sentido directo.



Resolução:

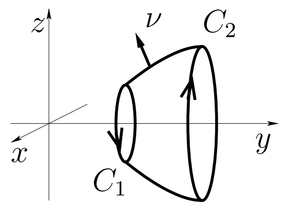
(a) *O campo $(P,Q) = (y^2e^x + y, 2ye^x + x^2 + 3)$ é de classe C^1 em todo o $\mathbb{R}^2$ e tem*
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (2ye^x + 2x) - (2ye^x + 1) = 2x - 1\ .$$
Seja A o domínio seccionalmente regular que é a região limitada por C. Pelo teorema de Green,
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_A (2x-1)\ dx\,dy = 0 - 4 = -4\ .$$
porque a coordenada x do centróide de A é 0 e a área de A (quadrado de lado 2) é 4.

(b) *Uma vez que F é um campo vectorial fechado no fecho da região B entre C e γ, pelo teorema de Green conclui-se que $\int_C F = \int_\gamma F$:*
$$\int_C F - \int_\gamma F = \int_B \underbrace{\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)}_{0} dx\,dy = 0\ .$$
Portanto
$$\int_C (P+M)\,dx + (Q+N)\,dy = \int_C P\,dx + Q\,dy + \int_C M\,dx + N\,dy = -4 + 2\pi\ .$$
$\square$

(4) Seja A a porção do hiperbolóide $y^2 = x^2 + z^2 + 1$ na faixa $\sqrt{2} < y < \sqrt{5}$.

(a) Escolha uma orientação o de A e parametrize cada componente de ∂A em termos de uma coordenada angular respeitando a orientação induzida por o.

(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} x\,dx \wedge dz$ onde o é a orientação que escolheu na alínea (a).



Resolução:

(a) *Escolhe-se a orientação o do domínio A dada pela normal ν que aponta para longe do eixo dos yy (normal com 2ª componente negativa). De acordo com esta orientação, a fronteira de A é composta pela circunferência C_1 de equação $x^2 + z^2 = 1$ no plano $y = \sqrt{2}$ orientada no sentido positivo quando se observa do ponto $(0, 10, 0)$ e pela circunferência C_2 de equação $x^2 + z^2 = 4$ no plano $y = \sqrt{5}$ orientada no sentido negativo quando se observa do ponto $(0, 10, 0)$. Usando uma coordenada angular, encontram-se as seguintes parametrizações respeitando a orientação escolhida:*

$$g_1 :]0, 2\pi[\to C_1 , \qquad g_1(t) = (\sin t, \sqrt{2}, \cos t) \quad \text{e}$$
$$g_2 :]0, 2\pi[\to C_2 , \qquad g_2(x) = (2\cos t, \sqrt{5}, 2\sin t) \ .$$

(b) *Para aplicar o teorema de Stokes, há que escrever $x\,dx \wedge dz$ como a derivada exterior de alguma forma ω, por exemplo, $\omega = \frac{x^2}{2}\,dz$. Pelo teorema de Stokes,*

$$\int_{A^o} \underbrace{x\,dx \wedge dz}_{d\omega} = \int_{(\partial A)^o} \underbrace{\frac{x^2}{2}\,dz}_{\omega} = \int_{C_1} \frac{x^2}{2}\,dz + \int_{C_2} \frac{x^2}{2}\,dz$$

e usando as parametrizações acima fica

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{2} \cdot (-\sin t)\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{4\cos^2 t}{2} \cdot (2\cos t)\,dt = 0$$

porque $\int_0^{2\pi} \sin^3 t\,dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t\,dt = 0.$

□

Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)

$$\int_{(\partial A)^o} \omega = \int_{A^o} d\omega$$

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{C_i^{o+}} (M\,dx + N\,dy) = \int_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\,dy$$

$$\int_{\partial A} F \cdot \nu\, dV_2 = \int_A \mathrm{div}\,\mathrm{F}\,\mathrm{dV}_3$$

$$\int_\gamma F = \int_A \mathrm{rot}\,\mathrm{F} \cdot \nu\,\mathrm{dV}_2$$