

## ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 4 – 12 DE DEZEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

### Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação de cada alínea 2.5.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 6ª feira, 16 de Dezembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

### Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

(1) Considere a variedade

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z = 1 - x^2 - y^2, y > 0\} .$$

(a) Exiba uma parametrização global de  $X$ .

(b) Calcule a massa de uma placa com a forma de  $X$  e densidade de massa

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} .$$

- (2) Seja  $F$  o campo vectorial dado por  $F(x, y, z) = (x, -2y, z)$  e considere as variedades  $A = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, z = 2\}$  e  $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1, z > 2\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .
- (a) Usando a definição, calcule o fluxo de  $F$  através de  $A$  segundo a normal unitária  $\nu$  que satisfaz  $\nu(0, 0, 2) = (0, 0, 1)$ .
- (b) Usando o teorema de divergência, calcule o fluxo de  $F$  através de  $B$  segundo a normal unitária  $n$  que satisfaz  $n(0, 0, 3) = (0, 0, 1)$ .

(3) Seja  $C$  o quadrado de vértices  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$  percorrido (uma vez) no sentido directo.

(a) Calcule

$$\int_C P dx + Q dy$$

onde  $P(x, y) = y^2 e^x + y$  e  $Q(x, y) = 2ye^x + x^2 + 3$ .

(b) Calcule

$$\int_C (P + M) dx + (Q + N) dy$$

onde  $(P, Q)$  é como na alínea (a) e  $F = (M, N)$  é um campo vectorial fechado de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  para o qual  $\int_\gamma F = 2\pi$  onde  $\gamma$  é a circunferência de raio 1 e centro na origem percorrida no sentido directo.

- (4) Seja  $A$  a porção do hiperbolóide  $y^2 = x^2 + z^2 + 1$  na faixa  $\sqrt{2} < y < \sqrt{5}$ .
- (a) Escolha uma orientação  $o$  de  $A$  e parametrize cada componente de  $\partial A$  em termos de uma coordenada angular respeitando a orientação induzida por  $o$ .
  - (b) Use o teorema de Stokes para calcular  $\int_{A^o} x \, dx \wedge dz$  onde  $o$  é a orientação que escolheu na alínea (a).

*Teorema de Stokes e casos particulares (Green, divergência e Stokes clássico)*

$$\int_{(\partial A)^\circ} \omega = \int_{A^\circ} d\omega$$
$$\sum_{i=1}^m \int_{C_i^{\circ+}} (M dx + N dy) = \int_A \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$
$$\int_{\partial A} F \cdot \nu dV_2 = \int_A \operatorname{div} F dV_3$$
$$\int_{\gamma} F = \int_A \operatorname{rot} F \cdot \nu dV_2$$