Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 PARA PRATICAR – NOVEMBRO DE 2005

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
(4)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \ , \qquad g(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+1}, (x^2+1)e^{yz}, z, x+z \right) \ .$$

(a) $\omega = x\,dy + y\,dx$;
(b) $\omega = y\,dx \wedge dy \wedge dz + e^{xyzt}\,dx \wedge dz \wedge dt$.

Resolução:

(a) *Como*

$$\begin{aligned} g^*dx &= dg^x = d\left(\tfrac{x}{x^2+1}\right) = \tfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \qquad \text{e} \\ g^*dy &= dg^y = d\left((x^2+1)e^{yz}\right) \\ &= 2xe^{yz}\,dx + (x^2+1)ze^{yz}\,dy + (x^2+1)ye^{yz}\,dz \end{aligned}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} g^*\omega &= g^x\,dg^y + g^y\,dg^x \\ &= \tfrac{x}{x^2+1}\left(2xe^{yz}\,dx + (x^2+1)ze^{yz}\,dy + (x^2+1)ye^{yz}\,dz\right) \\ &\quad + (x^2+1)e^{yz}\left(\tfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx\right) \\ &= \tfrac{1}{x^2+1}\left(2x^2e^{yz}\,dx + (x^2+1)xze^{yz}\,dy + (x^2+1)xye^{yz}\,dz + e^{yz}(1-x^2)\,dx\right) \\ &= e^{yz}\,dx + xze^{yz}\,dy + xye^{yz}\,dz \ . \end{aligned}$$

Alternativa: *Notando que* $\omega = d(xy)$, *fica*

$$g^*\omega = d\left(xe^{yz}\right) = e^{yz}\,dx + xze^{yz}\,dy + xye^{yz}\,dz \ .$$

(b) *Como as funções coordenadas* g^x, g^z *e* g^t *só dependem de duas variáveis,* x *e* z, *tem-se que* $g^*(dx \wedge dz \wedge dt) = 0$. *Então*

$$\begin{aligned} g^*\omega &= g^y\,dg^x \wedge dg^y \wedge dg^z \\ &= (x^2+1)e^{yz} \cdot \tfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &\quad \wedge \left(2xe^{yz}\,dx + (x^2+1)ze^{yz}\,dy + (x^2+1)ye^{yz}\,dz\right) \wedge dz \\ &= e^{2yz}(1-x^2)z\,dx \wedge dy \wedge dz \ . \end{aligned}$$

$\square$

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.
(a) $\omega = ye^{xy}\, dx \wedge dy + yz\cos(xyz)\, dx \wedge dz + xz\cos(xyz)\, dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$;
(b) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$ em $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) *Como a forma é fechada,*

$$\begin{aligned} d\omega &= d(ye^{xy}) \wedge dx \wedge dy + d(yz\cos(xyz)) \wedge dx \wedge dz + d(xz\cos(xyz)) \wedge dy \wedge dz \\ &= 0 - xyz^2 \sin(xyz)\, dy \wedge dx \wedge dz - xyz^2 \sin(xyz)\, dx \wedge dy \wedge dz \;=\; 0 \;, \end{aligned}$$

e o seu domínio, todo o $\mathbb{R}^3$*, é em estrela, conclui-se que* ω *é exacta. Procura-se um potencial da forma*

$$\alpha = \alpha_2\, dy + \alpha_3\, dz \;.$$

Para um α *assim tem-se*

$$d\alpha = \omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = ye^{xy} \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = yz\cos(xyz) \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = xz\cos(xyz) \end{cases}$$

Substituindo as soluções gerais da primeira e da segunda equações, $\alpha_2 = e^{xy} + g(y,z)$ *e* $\alpha_3 = \sin(xyz) + h(y,z)$ *na terceira equação, obtém-se*

$$xz\cos(xyz) + \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = xz\cos(xyz) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} \;.$$

Por exemplo, as funções identicamente nulas $g \equiv h \equiv 0$ *fornecem uma solução que conduz ao potencial para* ω

$$\alpha = e^{xy}\, dy + \sin(xyz)\, dz \;.$$

(b) *Sendo uma forma-4 em* $\mathbb{R}^4$*,* ω *é fechada pelo que é exacta de acordo com o lema de Poincaré. Procura-se um potencial da forma*

$$\alpha = f\, dy \wedge dz \wedge dt \;.$$

Para um α *assim tem-se*

$$d\alpha = \omega \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \;.$$

Por exemplo, a função $f(x,y,z,t) = x,\ \forall (x,y,z,t)$ *fornece a solução correspondente ao potencial para* ω

$$\alpha = x\, dy \wedge dz \wedge dt \;.$$

□

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores-1 em $\mathbb{R}^n$ tem-se

$$(a+b) \wedge c = a \wedge (b+c) \ .$$

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *Pela linearidade do produto exterior em cada factor, o membro esquerdo vale* $a \wedge c + b \wedge c$ *e o membro direito vale* $a \wedge c + a \wedge b$. *Procura-se um contra-exemplo onde* $b \wedge c \neq a \wedge b$. *Por exemplo, tomando* $a = e^1$, $b = c = e^2$ *em* $\mathbb{R}^2$ *obtém-se* $(a+b) \wedge c = e^1 \wedge e^2 \neq 2e^1 \wedge e^2 = a \wedge (b+c)$. $\square$

(b) Para quaisquer formas de grau ímpar tem-se

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \gamma \wedge \beta \wedge \alpha \ .$$

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *Se* α *tem grau* r *e* β *tem grau* s, *então* $\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha$. *Quando ambas têm graus ímpares, tem-se* $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. *Aplicando a fórmula acima aos pares, obtém-se*

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = -\beta \wedge \alpha \wedge \gamma = \beta \wedge \gamma \wedge \alpha = -\gamma \wedge \beta \wedge \alpha \ .$$

Em particular, $dx \wedge dy \wedge dz \neq dz \wedge dy \wedge dx$. $\square$

(c) Se α e β são dois potenciais para ω em todo o $\mathbb{R}^n$, então a diferença $\alpha - \beta$ é uma forma exacta.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Como $d\alpha = d\beta = \omega$, tem-se que $d(\alpha - \beta) = 0$. Sendo a diferença $\alpha - \beta$ uma forma fechada definida em todo o $\mathbb{R}^n$ que é um conjunto em estrela, conclui-se pelo lema de Poincaré que $\alpha - \beta$ é uma forma exacta.* □

(d) Se ω é uma forma-2 (de classe C^1) definida em todo $\mathbb{R}^{2n}$, então o produto exterior com n factores $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ é uma forma exacta.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *O produto ω^n é uma forma-$2n$ em $\mathbb{R}^{2n}$, pelo que é fechada (qualquer forma-$(2n+1)$ em $\mathbb{R}^{2n}$ é zero). Sendo fechada e definida em todo o $\mathbb{R}^{2n}$ que é um conjunto em estrela, o lema de Poincaré garante que ω^n é uma forma exacta.* □

(e) Para qualquer campo vectorial (de classe C^2) $F = (M, N, P)$ em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}F) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}F) - \Delta F \ ,$$

onde $\Delta(M, N, P) = (\Delta M, \Delta N, \Delta P)$ e $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é o laplaciano usual do campo escalar f.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Como ambos os membros são lineares em F e os papéis das três componentes (M, N, P) de F são equivalentes, basta verificar a igualdade para $F = (M, 0, 0)$. Nesse caso, o membro esquerdo é*

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(M,0,0)) = \mathrm{rot}\left(0, \frac{\partial M}{\partial z}, -\frac{\partial M}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 M}{\partial x \partial z}\right)$$

e o membro direito é

$$\mathrm{grad}(\mathrm{div}(M,0,0)) - \Delta(M,0,0) = \mathrm{grad}\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}, 0, 0\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}, 0, 0\right) \ .$$

O resultado segue pois da igualdade das derivadas cruzadas para uma função M de classe C^2. □

(4) Para a forma

$$\omega = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

onde B_i e E_i $(i = 1, 2, 3)$ são funções de classe C^1 num aberto de $\mathbb{R}^4$, mostre que escrevendo $E = (E_1, E_2, E_3)$ e $B = (B_1, B_2, B_3)$

$$d\omega = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{rot}E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{div}B = 0\ .$$

(Os operadores rot e div são tomados relativamente às variáveis (x, y, z).)

Resolução: *Escrevendo* $\alpha_{_E} = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$, $\beta_{_B} = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$ *e* $\frac{\partial B}{\partial t} = (\frac{\partial B_1}{\partial t}, \frac{\partial B_2}{\partial t}, \frac{\partial B_3}{\partial t})$, *de maneira a que* $d\alpha_{_E} = \beta_{\mathrm{rot}E}$ *e* $d\beta_{_B} = \mathrm{div}B\, dx \wedge dy \wedge dz$, *obtém-se*

$$\begin{aligned} d\omega = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad d\,(\alpha_{_E} \wedge dt + \beta_{_B}) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad d\alpha_{_E} \wedge dt + d\beta_{_B} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \beta_{\mathrm{rot}E} \wedge dt + \mathrm{div}B\, dx \wedge dy \wedge dz + \beta_{\frac{\partial B}{\partial t}} \wedge dt = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \beta_{\mathrm{rot}E} + \beta_{\frac{\partial B}{\partial t}} = 0 \quad \textit{e} \quad \mathrm{div}B = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{rot}E + \tfrac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \textit{e} \quad \mathrm{div}B = 0\ . \end{aligned}$$

□

Comentário: *A equação* $d\omega = 0$ *representa duas das quatro* **equações de Maxwell** *para um campo electromagnético* (E, B)*:*

$$\begin{cases} \mathrm{div}E = 4\pi\rho & \text{(campos eléctricos divergem de cargas eléctricas; } \rho \text{ é a densidade de carga)} \\ \mathrm{div}B = 0 & \text{(não há cargas magnéticas)} \\ \mathrm{rot}E = -\dfrac{\partial B}{\partial t} & \text{(campos eléctricos são produzidos por campos magnéticos em evolução)} \\ \mathrm{rot}B = \dfrac{\partial E}{\partial t} + 4\pi J & \text{(campos magnéticos são produzidos por campos eléctricos em evolução} \\ & \text{e por correntes eléctricas; } J \text{ é o vector densidade de corrente)} \end{cases}$$

As outras duas equações de Maxwell também correspondem a uma equação em termos da derivada exterior: $\star d \star \omega = 4\pi\alpha$, *onde* $\star$ *é uma operação sobre formas definida usando a métrica de Lorentz e* $\alpha = \rho\, dt + J_1\, dx + J_2\, dy + J_3\, dz$ *é uma forma-1 definida a partir de* ρ *e* $J = (J_1, J_2, J_3)$.