

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 PARA PRATICAR – NOVEMBRO DE 2005

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

| pergunta | classificação |
|----------|---------------|
| (1)(a) | |
| (1)(b) | |
| (2)(a) | |
| (2)(b) | |
| (3)(a) | |
| (3)(b) | |
| (3)(c) | |
| (3)(d) | |
| (3)(e) | |
| (4) | |
| total | |

Nº:

Curso:

Nome:

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad g(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}, (x^2 + 1)e^{yz}, z, x + z \right).$$

(a) $\omega = x dy + y dx;$

(b) $\omega = y dx \wedge dy \wedge dz + e^{xyzt} dx \wedge dz \wedge dt.$

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a) $\omega = ye^{xy} dx \wedge dy + yz \cos(xyz) dx \wedge dz + xz \cos(xyz) dy \wedge dz$ em \mathbb{R}^3 ;

(b) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt$ em \mathbb{R}^4 .

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores-1 em \mathbb{R}^n tem-se

$$(a + b) \wedge c = a \wedge (b + c) .$$

Verdadeira

Falsa

(b) Para quaisquer formas de grau ímpar tem-se

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \gamma \wedge \beta \wedge \alpha .$$

Verdadeira

Falsa

- (c) Se α e β são dois potenciais para ω em todo o \mathbb{R}^n , então a diferença $\alpha - \beta$ é uma forma exacta.

Verdadeira

Falsa

- (d) Se ω é uma forma-2 (de classe C^1) definida em todo \mathbb{R}^{2n} , então o produto exterior com n factores $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ é uma forma exacta.

Verdadeira

Falsa

- (e) Para qualquer campo vectorial (de classe C^2) $F = (M, N, P)$ em \mathbb{R}^3 , tem-se

$$\text{rot}(\text{rot}F) = \text{grad}(\text{div}F) - \Delta F,$$

onde $\Delta(M, N, P) = (\Delta M, \Delta N, \Delta P)$ e $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ é o laplaciano usual do campo escalar f .

Verdadeira

Falsa

(4) Para a forma

$$\omega = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

onde B_i e E_i ($i = 1, 2, 3$) são funções de classe C^1 num aberto de \mathbb{R}^4 , mostre que escrevendo $E = (E_1, E_2, E_3)$ e $B = (B_1, B_2, B_3)$

$$d\omega = 0 \quad \iff \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div} B = 0 .$$

(Os operadores rot e div são tomados relativamente às variáveis (x, y, z) .)