

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 – 21 DE NOVEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
(4)	
total	

Nº:

Curso: _____

Nome: _____

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t, e^{-s}).$$

(a) $\omega = x \, dy - y \, dx;$

(b) $\omega = x \, dy \wedge dz - y \, dx \wedge dz.$

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a) $\omega = e^{x+y} dx + e^{x+y} dy + zt dt$ em \mathbb{R}^4 ;

(b) $\omega = 3x^2 dx \wedge dy + e^x y dx \wedge dz + (e^x - 1) dy \wedge dz$ em \mathbb{R}^3 .

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para qualquer covector- r em \mathbb{R}^n ($r = 1, \dots, n$) tem-se

$$a \wedge a = 0 .$$

Verdadeira

Falsa

(b) O espaço vectorial $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$ dos covectores- r em \mathbb{R}^n tem dimensão rn , $\forall r = 1, \dots, n$.

Verdadeira

Falsa

(c) Se ω é uma forma exacta, então $\omega \wedge \omega$ também é exacta.

Verdadeira

Falsa

(d) Se α é uma forma fechada definida na união de dois quadrantes abertos disjuntos em \mathbb{R}^2 , então α é exacta.

Verdadeira

Falsa

(e) Para quaisquer campos vectoriais (de classe C^1) F e G em \mathbb{R}^3 , tem-se

$$\operatorname{div}(F \times G) = G \cdot \operatorname{rot}F - F \cdot \operatorname{rot}G .$$

Verdadeira

Falsa

(4) Sejam $\omega_1, \dots, \omega_k$ formas-1 num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^k f_{ij} dg_j$$

para certas funções f_{ij} e g_j de classe C^2 ($1 \leq i, j \leq k$). Supondo que os covectores-1 $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$ são linearmente independentes em todos os pontos $x \in A$, determine formas-1 θ_{ij} tais que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^k \theta_{ij} \wedge \omega_j .$$

Sugestão: Em cada ponto x , a matriz $(f_{ij}(x))$ é invertível.