

## ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 – 21 DE NOVEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

### RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

**Duração: 50 minutos**

### Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

### Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
(4)	
total	

Nº:

Curso: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

(1) Calcule os *pullbacks*  $g^*\omega$  das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t, e^{-s}).$$

(a)  $\omega = y dx - x dy;$

(b)  $\omega = y dx \wedge dz - x dy \wedge dz.$

**Resolução:** *Como*

$$g^*dx = dg^x = d(e^s \cos t) = e^s \cos t ds - e^s \sin t dt,$$

$$g^*dy = dg^y = d(e^s \sin t) = e^s \sin t ds + e^s \cos t dt \quad e$$

$$g^*dz = dg^z = d(e^{-s}) = -e^{-s} ds,$$

*obtem-se:*

(a)

$$\begin{aligned} g^*\omega &= g^y dg^x - g^x dg^y \\ &= e^s \sin t (e^s \cos t ds - e^s \sin t dt) - e^s \cos t (e^s \sin t ds + e^s \cos t dt) \\ &= -e^{2s} dt \end{aligned}$$

e

(b)

$$\begin{aligned} g^*\omega &= g^y dg^x \wedge dg^z - g^x dg^y \wedge dg^z \\ &= e^s \sin t (-e^s \sin t dt) \wedge (-e^{-s} ds) - e^s \cos t (e^s \cos t dt) \wedge (-e^{-s} ds) \\ &= -e^s ds \wedge dt. \end{aligned}$$

**Alternativa:** *Notando que a forma da alínea (b) é o produto da forma da alínea (a) por  $dz$ , obtém-se*

$$g^*\omega = g^*(y dx - x dy) \wedge g^*dz = -e^s ds \wedge dt.$$

□

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a)  $\omega = 3x^2y dx + x^3 dy + e^z dt$  em  $\mathbb{R}^4$ ;

(b)  $\omega = dx \wedge dy + (\cos(x+y) + 1)dx \wedge dz + (\cos(x+y) + 1)dy \wedge dz$  em  $\mathbb{R}^3$ .

**Resolução:**

(a) Começa-se por verificar se a forma é fechada:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(3x^2y) \wedge dx + d(x^3) \wedge dy + d(e^z) \wedge dt \\ &= 3x^2 dy \wedge dx + 3x^2 dx \wedge dy + e^z dz \wedge dt \\ &= e^z dz \wedge dt \neq 0. \end{aligned}$$

Como  $\omega$  não é fechada, não pode ser exacta.

(b) Como a forma é fechada,

$$\begin{aligned} d\omega &= 0 + d(\cos(x+y) + 1) \wedge dx \wedge dz + d(\cos(x+y) + 1) \wedge dy \wedge dz \\ &= -\sin(x+y) dy \wedge dx \wedge dz - \sin(x+y) dx \wedge dy \wedge dz = 0, \end{aligned}$$

e o seu domínio, todo o  $\mathbb{R}^3$ , é em estrela, conclui-se que  $\omega$  é exacta. Procura-se um potencial da forma

$$\alpha = \alpha_2 dy + \alpha_3 dz.$$

Para um  $\alpha$  assim tem-se

$$d\alpha = \omega \iff \begin{cases} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial x} = \cos(x+y) + 1 \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial y} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial z} = \cos(x+y) + 1 \end{cases}$$

Substituindo as soluções gerais da primeira e da segunda equações,  $\alpha_2 = x + g(y, z)$  e  $\alpha_3 = \sin(x+y) + x + h(y, z)$  na terceira equação, obtém-se

$$\cos(x+y) + \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = \cos(x+y) + 1 \iff \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} = 1.$$

Por exemplo, as funções  $g(y, z) \equiv 0$  e  $h(y, z) = y$  fornecem uma solução que conduz ao potencial para  $\omega$

$$\alpha = x dy + (\sin(x+y) + x + y) dz.$$

□

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores- $r$  em  $\mathbb{R}^n$  ( $r = 1, \dots, n$ ) tem-se

$$a \wedge b + b \wedge a = 0 .$$

Verdadeira

Falsa

**Resolução:** Por exemplo, quando  $a = e^1$  e  $b = e^2 \wedge e^3$  em  $\mathbb{R}^3$  tem-se

$$a \wedge b + b \wedge a = 2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \neq 0 .$$

(Tem-se  $a \wedge b + b \wedge a = 0$  se ambos  $a$  e  $b$  têm grau ímpar.)

(b) O espaço vectorial  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$  dos covectores- $r$  em  $\mathbb{R}^n$  tem dimensão  $n - r + 1$ ,  $\forall r = 1, \dots, n$ .

Verdadeira

Falsa

**Resolução:** O espaço vectorial  $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$  tem dimensão  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ . Por exemplo, para  $r = 2$  e  $n = 3$  tem-se  $\dim \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^* = 3 \neq 2 = n - r + 1$ .

(c) Há uma forma exacta  $\omega$  para a qual  $\omega \wedge \omega$  não é exacta.

Verdadeira

Falsa

**Resolução:** Sendo exacta,  $\omega$  é fechada. Se  $\alpha$  é um potencial para  $\omega$ , ou seja  $d\alpha = \omega$ , então

$$d(\alpha \wedge \omega) = d\alpha \wedge \omega + 0 = \omega \wedge \omega,$$

o que mostra que  $\alpha \wedge \omega$  é um potencial para  $\omega \wedge \omega$ .  $\square$

(d) Se  $\alpha$  é uma forma fechada definida na união de dois discos abertos disjuntos em  $\mathbb{R}^2$ , então  $\alpha$  é exacta.

Verdadeira

Falsa

**Resolução:** Cada um dos discos é um conjunto em estrela. Pelo lema de Poincaré, conclui-se que  $\alpha$  é uma forma exacta em cada um dos discos. Uma vez que os discos são disjuntos, pode-se definir um potencial para  $\alpha$  dado separadamente por um potencial em cada disco.  $\square$

(e) Para quaisquer campos vectoriais fechados  $F$  e  $G$  em  $\mathbb{R}^3$ , tem-se

$$\operatorname{div}(F \times G) = 0.$$

Verdadeira

Falsa

**Resolução:** Escrevendo  $\alpha_F = F_x dx + F_y dy + F_z dz$  e  $\beta_G = G_x dy \wedge dz + G_y dz \wedge dx + G_z dx \wedge dy$ , tem-se  $\beta_{F \times G} = \alpha_F \wedge \alpha_G$ , pelo que

$$\operatorname{div}(F \times G) dx \wedge dy \wedge dz = d\beta_{F \times G} = d(\alpha_F \wedge \alpha_G) = d\alpha_F \wedge \alpha_G - \alpha_F \wedge d\alpha_G.$$

Se  $F$  e  $G$  são fechados, i.e.,  $\operatorname{rot}F = \operatorname{rot}G = 0$ , então  $d\alpha_F = \beta_{\operatorname{rot}F} = 0$  e  $d\alpha_G = \beta_{\operatorname{rot}G} = 0$ .  $\square$

(4) Sejam  $\omega_1, \dots, \omega_k$  formas-1 num aberto  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  tais que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^k f_{ij} dg_j$$

para certas funções  $f_{ij}$  e  $g_j$  de classe  $C^2$  ( $1 \leq i, j \leq k$ ). Supondo que os covectores-1  $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$  são linearmente independentes em todos os pontos  $x \in A$ , determine formas-1  $\theta_{ij}$  tais que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^k \theta_{ij} \wedge \omega_j .$$

**Sugestão:** Em cada ponto  $x$ , a matriz  $(f_{ij}(x))$  é invertível.

**Resolução:** A expressão para os  $\omega_i$ 's dá

$$d\omega_i = \sum_{\ell=1}^k df_{i\ell} \wedge dg_{\ell} .$$

Uma vez que os covectores-1  $\omega_1(x), \dots, \omega_k(x)$  são linearmente independentes em todos os pontos  $x \in A$ , tem-se que em cada ponto a matriz  $(f_{ij}(x))$  é invertível. Seja  $(h_{ij}(x))$  a matriz inversa de  $(f_{ij}(x))$ . Então

$$dg_{\ell} = \sum_{j=1}^k h_{\ell j} \omega_j$$

pelo que

$$d\omega_i = \sum_{\ell=1}^k df_{i\ell} \wedge \left( \sum_{j=1}^k h_{\ell j} \omega_j \right) = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{\ell=1}^k h_{\ell j} df_{i\ell} \right) \wedge \omega_j .$$

Tome-se  $\theta_{ij} = \sum_{\ell=1}^k h_{\ell j} df_{i\ell}$ . □