Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 3 – 21 DE NOVEMBRO DE 2005 – 15:10-16H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 28 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
(4)	
total	

Nº: ____________

Curso: ____________

Nome: ____

(1) Calcule os *pullbacks* $g^*\omega$ das seguintes formas diferenciais pela transformação

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad g(s,t) = (e^s \cos t, e^s \sin t, e^{-s}) \ .$$

(a) $\omega = y\,dx - x\,dy$;

(b) $\omega = y\,dx \wedge dz - x\,dy \wedge dz$.

(2) Decida justificadamente se as seguintes formas diferenciais são exactas e, em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a) $\omega = 3x^2y\,dx + x^3\,dy + e^z\,dt$ em $\mathbb{R}^4$;

(b) $\omega = dx \wedge dy + (\cos(x+y)+1)dx \wedge dz + (\cos(x+y)+1)dy \wedge dz$ em $\mathbb{R}^3$.

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Para quaisquer covectores-r em $\mathbb{R}^n$ $(r = 1, \ldots, n)$ tem-se

$$a \wedge b + b \wedge a = 0 \ .$$

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) O espaço vectorial $\Lambda^r(\mathbb{R}^n)^*$ dos covectores-r em $\mathbb{R}^n$ tem dimensão $n - r + 1$, $\forall r = 1, \ldots, n$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma forma exacta ω para a qual $\omega \wedge \omega$ não é exacta.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se α é uma forma fechada definida na união de dois discos abertos disjuntos em $\mathbb{R}^2$, então α é exacta.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Para quaisquer campos vectoriais fechados F e G em $\mathbb{R}^3$, tem-se

$$\mathrm{div}(F \times G) = 0 \ .$$

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(4) Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_k$ formas-1 num aberto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{k} f_{ij}\, dg_j$$

para certas funções f_{ij} e g_j de classe C^2 $(1 \leq i, j \leq k)$. Supondo que os covectores-1 $\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x)$ são linearmente independentes em todos os pontos $x \in A$, determine formas-1 θ_{ij} tais que

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \theta_{ij} \wedge \omega_j \ .$$

Sugestão: Em cada ponto x, a matriz $(f_{ij}(x))$ é invertível.