Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 30/Out/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 2 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2005

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 7 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

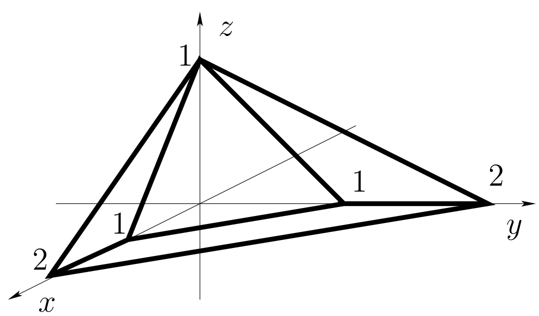
Nome: ____

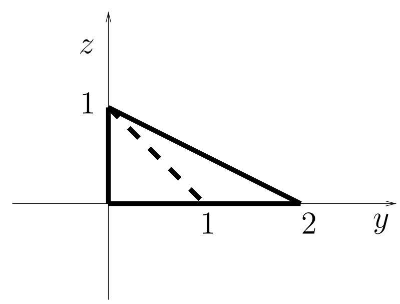
(1) Forneça uma expressão em termos de integrais iterados para o momento de inércia I_x em relação ao eixo dos xx de um sólido no primeiro octante limitado pelos planos coordenados e pelos planos de equações $x + y + z = 1$ e $x + y + 2z = 2$, assumindo que a densidade de massa é constante igual a 1.

Resolução: *O sólido (com contorno esboçado em baixo) tem projecção no plano yz dada por um triângulo, onde se distinguem as duas zonas consoante o limite inferior para a variável x é dado pelo plano $x + y + z = 1$ ou pelo plano coordenado $x = 0$; o limite superior para x é sempre dado pelo plano $x + y + 2z = 2$. Assim:*

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{1-y-z}^{2-y-2z} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz + \int_0^1 \int_{1-z}^{2-2z} \int_0^{2-y-2z} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz \ .$$

□





Comentário: *Para escrever o integral na ordem de integração $\int\int\int dy\, dx\, dz$, usa-se a projecção no plano xz que é equivalente à escolhida acima. Para escrever o integral na ordem de integração $\int\int\int dz\, dy\, dx$, recorre-se à projecção no plano xy que é um triângulo onde se distinguem também duas zonas consoante o limite inferior para a variável z e onde uma dessas zonas tem que ser ainda subdividida em duas partes para escrever os extremos dos integrais iterados:*

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{1-x-y}^{1-\frac{x+y}{2}} (y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx + \int_0^1 \int_{1-x}^{2-x} \int_0^{1-\frac{x+y}{2}} (y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{1-\frac{x+y}{2}} (y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx \ .$$

(2) Usando a mudança de coordenadas

$$x = e^s \cos t \qquad \text{e} \qquad y = e^s \sin t \ ,$$

calcule $\int_X f$ onde $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2 \text{ e } y \geq 0\}$ e

$$f : X \to \mathbb{R} \ , \quad f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \ .$$

Resolução: *O jacobiano da função de mudança de coordenadas $g(s, t) = (e^s \cos t, e^s \sin t)$ é*

$$\det g'(s, t) = \det \begin{bmatrix} e^s \cos t & -e^s \sin t \\ e^s \sin t & e^s \cos t \end{bmatrix} = e^{2s} \ .$$

Em termos das coordenadas (s, t), com $s \in \mathbb{R}$ e escolhendo $t \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ por conveniência a seguir, a região de integração é

$$\begin{aligned} T &= \{(s, t) : 1 \leq e^{2s} \leq e^2 \text{ e } \sin t \geq 0\} \\ &= \{(s, t) : 0 \leq s \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq \pi\} \ . \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema de mudança de integrais para integrais e pelo teorema de Fubini, o integral pedido é

$$\begin{aligned} \int_X f \, dx \, dy &= \int_T (f \circ g) |\det g'| \, ds \, dt \\ &= \int_0^\pi \int_0^1 \frac{2s}{e^{2s}} \cdot e^{2s} \, ds \, dt \\ &= \pi \int_0^1 2s \, ds = \pi \ . \end{aligned}$$

□

(3) (a) Exprima o seguinte integral (escrito em coordenadas cartesianas) como um integral iterado em coordenadas esféricas:

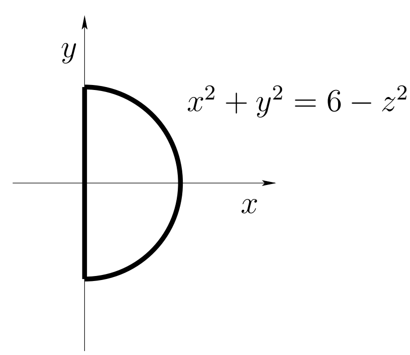
$$\int_1^2 \int_{-\sqrt{6-z^2}}^{\sqrt{6-z^2}} \int_0^{\sqrt{6-y^2-z^2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\ .$$

Resolução: *Para* $0 \le z \le 2$*, os cortes em planos* $z =$*const. lêem-se nos extremos dos dois integrais interiores – são os semi-discos representados na figura abaixo. Portanto, a região de integração é o pedaço da semi-bola* $x^2+y^2+z^2 \le 6$*,* $x \ge 0$ *compreendido entre os planos* $z=1$ *e* $z=2$*. Em coordenadas esféricas a semi-bola é dada por* $r \le \sqrt{6}$*,* $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$*, e os planos horizontais têm equações* $r\cos\varphi = 1$ *e* $r\cos\varphi = 2$*. A intersecção destes planos com a esfera* $r=\sqrt{6}$ *é dada por* $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$ *e* $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$*, respectivamente. Para ângulos* $0 < \varphi \le \arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$*, os limites para* r *são dados pelos planos:* $\frac{1}{\cos\varphi} \le r \le \frac{2}{\cos\varphi}$*. Para ângulos* $\arccos\frac{2}{\sqrt{6}} \le \varphi \le \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$*, os limites para* r *são dados pelo plano* $z=1$ *e pela esfera:* $\frac{1}{\cos\varphi} \le r \le \sqrt{6}$*. O integral escreve-se então:*

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}}^{\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\sqrt{6}} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta\ .$$

$\square$



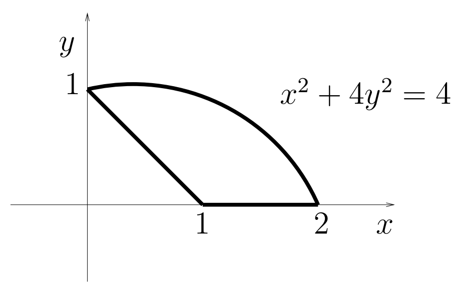
(b) Exprima o seguinte integral como um integral iterado em coordenadas cartesianas da função $f(x, y, z)$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \int_{2\rho\cos\theta}^{2+\rho\sin\theta} f(2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\, dz\, d\rho\, d\theta \ .$$

Resolução: *Tomando $x = 2\rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, os limites de integração para z são dados por $x \le z \le 2 + y$, os limites para ρ fornecem $x + y \ge 1$ e $\frac{x^2}{4} + y^2 \le 1$ e os limites para θ fornecem $x \ge 0$ e $y \ge 0$. A projecção no plano xy tem pois o contorno esboçado abaixo. Como o jacobiano da mudança de coordenadas $g(\rho, \theta, z) = (2\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$ é 2ρ, o jacobiano da mudança inversa é o inverso $\frac{1}{\sqrt{x^2+4y^2}}$, pelo que o integral se escreve então:*

$$\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{4-4y^2}} \int_x^{2+y} \frac{f(x,y,z)}{\sqrt{x^2+4y^2}}\, dz\, dx\, dy \ .$$

□



(4) (a) Demonstre o *teorema do valor intermédio para integrais*: Seja X um conjunto compacto e conexo em $\mathbb{R}^n$. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável sobre X. Prove que existe um ponto $x_0 \in X$ tal que

$$\int_X fg = f(x_0) \int_X g \ .$$

Resolução: *Se M e m são os valores máximo e mínimo de f, então $mg \leq fg \leq Mg$. Por comparação dos integrais obtém-se*

$$m \int_X g \leq \int_X fg \leq M \int_X g \ .$$

Se $\int_X g = 0$, então $\int_X fg \, dV = 0$ e x_0 pode ser qualquer ponto de X. Se $\int_X g \, dV \neq 0$, então, pelo teorema do valor intermédio usual aplicado à função f, como $m \leq \frac{\int_X fg}{\int_X g} \leq M$, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \frac{\int_X fg}{\int_X g}$. $\square$

(b) Mostre que qualquer variedade X em $\mathbb{R}^n$ com dimensão m menor do que n tem medida nula.

Sugestão: Qualquer ponto da variedade admite uma vizinhança $\mathcal{U}$ onde $X \cap \mathcal{U}$ é o gráfico de uma função continuamente diferenciável de um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ para um subconjunto de $\mathbb{R}^{n-m}$.

Resolução: *Continuando a partir da sugestão, tomam-se vizinhanças $\mathcal{U}$ que sejam bolas abertas de raio racional centradas num ponto de coordenadas racionais. A colecção destas bolas em $\mathbb{R}^n$ é numerável pois pode ser indexada por $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^+$ de acordo com o seu centro e raio. A variedade X é pois a união (numerável) dos gráficos correspondentes a cada uma dessas vizinhanças $\mathcal{U}$. Como cada um desses gráficos é um conjunto de medida nula, a união (numerável) desses gráficos, X, tem medida nula.* $\square$

PARA RASCUNHO