Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 2 – 31 DE OUTUBRO DE 2005 – 15:10-16H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- Utilize papel de rascunho para esboços e cálculos preliminares, de modo a guardar o espaço de resposta para uma **apresentação clara e bem justificada** de todos os cálculos ou argumentos.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 7 de Novembro, 18h30-19h30, na *antiga* sala de dúvidas, localizada na cave -2 do Edifício de Pós-Graduação.
- Boa sorte!

Para a correcção

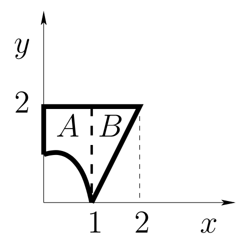
pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Calcule a área de uma superfície do primeiro quadrante limitada pelo eixo dos yy, pelas rectas de equações $y = 2$ e $2x - y = 2$ e pela parábola $y = 1 - x^2$, com um contorno como o esboçado na figura.



Resolução: *A área é dada pelo integral da função constante igual a 1 nessa superfície. Pelo teorema de Fubini, esse integral pode ser expresso em integrais iterados. A parábola $y = 1 - x^2$ intersecta o semi-eixo positivo dos xx em $x = 1$. A região de integração pode ser decomposta em duas zonas, A e B, para $0 \leq x \leq 1$ e para $1 \leq x \leq 2$ respectivamente, em cada uma das quais os limites para y em função de x têm expressões simples:*

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^1 \int_{1-x^2}^2 1\, dy\, dx + \int_1^2 \int_{2x-2}^2 1\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 (1 + x^2)\, dx + \int_1^2 (4 - 2x)\, dx \\
&= \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[4x - x^2 \right]_1^2 \\
&= 1 + \frac{1}{3} + 8 - 4 - 4 + 1 = \frac{7}{3}\,.
\end{aligned}
$$

□

(2) Usando a mudança de coordenadas

$$x = u - uv \qquad \text{e} \qquad y = uv \ ,$$

calcule $\int_R \frac{1}{x+y}$ onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas rectas $x+y = 2$, $x+y=5$, $y=0$ e $x=0$.

Resolução: *Como $x+y=u$, a restrição $2 \leq x+y \leq 5$ escreve-se $2 \leq u \leq 5$ nas novas coordenadas. Nesta faixa, o limite $y = uv = 0$ é dado por $v = 0$ e o limite $x = u(1-v) = 0$ é dado por $v = 1$. Portanto, a região de integração nas coordenadas (u, v) é o rectângulo $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq u \leq 5$ e $0 \leq v \leq 1\}$. O jacobiano desta mudança de coordenadas é*

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{bmatrix} = u - uv + uv = u$$

que é sempre positivo no rectângulo de integração. Logo, pelo teorema de mudança de coordenadas para o integral e pelo teorema de Fubini, obtém-se

$$\int_R \frac{1}{x+y}\, dx\, dy = \int_2^5 \int_0^1 \frac{1}{u} \cdot u \, dv \, du = (5-2) \cdot (1-0) = 3 \ .$$

□

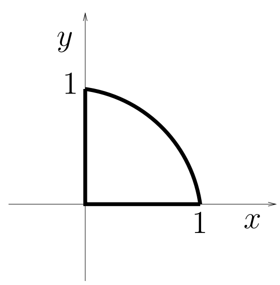
(3) (a) Exprima o seguinte integral (escrito em coordenadas cartesianas) como um integral iterado em coordenadas esféricas:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_2^{\sqrt{5-x^2-y^2}} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx \ .$$

Resolução: *Os dois integrais exteriores indicam que a projecção da região de integração no plano xy é o quarto de disco $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O integral interior indica que, para cada (x,y), a variável z varia desde o plano $z=2$ até à esfera $x^2+y^2+z^2=5$. No primeiro octante, esta esfera intersecta o cilindro $x^2+y^2=1$ em $z=2$, correspondendo a $\sqrt{5}\cos\varphi = 2$, ou seja, $\varphi = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. Como o jacobiano desta mudança de coordenadas tem módulo $r^2\sin\varphi$, o integral escreve-se*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}} \int_{\frac{2}{\cos\varphi}}^{\sqrt{5}} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta \ .$$

$\square$



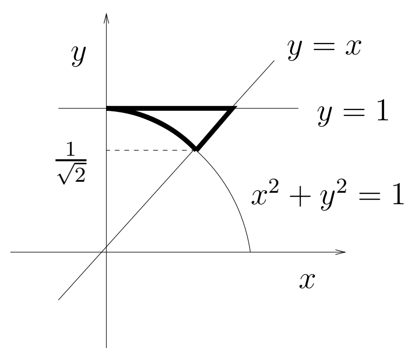
(a) Exprima o seguinte integral (escrito em coordenadas cilíndricas) como um integral iterado em coordenadas cartesianas:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{\frac{1}{\sin\theta}} \int_{\rho\cos\theta}^{1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\, dz\, d\rho\, d\theta \ .$$

Resolução: *Os dois integrais exteriores (em θ e em ρ) indicam que a projecção da região de integração no plano xy é a porção $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ do primeiro quadrante acima da recta bissectriz, fora do disco de raio 1 centrado na origem e abaixo de $y = 1$. No primeiro quadrante, a circunferência $x^2 + y^2 = 1$ intersecta $y = x$ no ponto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. O integral interior indica que, para cada $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, a variável z varia desde $z = x$ até $z = 1$. Como o jacobiano da mudança de coordenadas inversa é ρ, o jacobiano desta mudança é $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e o integral escreve-se*

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{y} \int_{x}^{1} f(x, y, z) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dz\, dx\, dy \ .$$

$\square$



(4) (a) Seja X um compacto de $\mathbb{R}^n$ simétrico relativamente à origem, i.e.,

$$x \in X \quad \Longrightarrow \quad -x \in X \ .$$

Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função integrável e ímpar, i.e., $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$. Mostre que $\int_X f = 0$.

Resolução: *Aplique-se ao integral $\int_X f$ a mudança de coordenadas*

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \ , \quad g(x) = -x \ ,$$

para a qual $\det g'(x) = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^n$. A simetria do conjunto X implica que $g(X) = X$. A função f ser ímpar implica que $f \circ g = -f$. Usando estes dois factos (na 1ª e 3ª igualdades abaixo) e o teorema de mudança de coordenadas (na 2ª igualdade), obtém-se

$$\int_X f = \int_{g(X)} f = \int_X (f \circ g) \cdot |\det g'| = \int_X (-f) \cdot 1 = -\int_X f \ .$$

Como o único número real que é igual ao seu simétrico é o zero, conclui-se que $\int_X f = 0$. □

(b) Dê um exemplo de um aberto em $[0,1]$ com fronteira de medida não-nula.

Resolução: *Escolha-se uma sucessão* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *que enumere todos os números racionais do intervalo* $]0,1[$ *(por exemplo, utilizando o argumento em ziguezague discutido numa aula teórica). Para cada* x_n *dessa sucessão, seja* X_n *o conjunto aberto obtido por intersecção de* $]0,1[$ *com o intervalo aberto centrado em* x_n *de comprimento* $\frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 1,2,\ldots$. *O conjunto união* $X = \cup_{n=1}^{+\infty} X_n$ *é aberto por ser a união de abertos e tem comprimento*

$$\mathit{Vol}\,(X) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \mathit{Vol}\,(X_n) \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\ .$$

Qualquer ponto de $[0,1] \setminus X$ *pertence à fronteira de* X *pois qualquer intervalo aberto em* $[0,1]$ *contém algum racional* x_n *(e todos os* x_n *pertencem a* X*). Como*

$$\mathit{Vol}\,(\partial X) \ge \mathit{Vol}\,([0,1] \setminus X) = 1 - \mathit{Vol}\,(X) \ge \frac{1}{2}\ ,$$

conclui-se que a fronteira de X *não tem medida nula.*

$\square$

PARA RASCUNHO