Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/Out/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 1 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2005

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 17 de Outubro, 18h30-19h30, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a superfície $X \subset \mathbb{R}^4$ definida pelas equações

$$\begin{cases} u = & 2y^2 - x^2 \\ v = & x^4 - \sin(xy) + 3 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (0, 1, 2, 3)$ em X onde é possível parametrizar X escrevendo (x, y) como função de (u, v).

Resolução: *A superfície X pode ser vista como o gráfico de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2y^2 - x^2, x^4 - \sin(xy) + 3)$, que é uma função de classe C^1 (até mesmo de classe C^∞). O ponto $(0, 1, 2, 3)$ pertence de facto a X pois $f(0, 1) = (2, 3)$. Como $f'(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 4y \\ 4x^3 - y\cos(xy) & -x\cos(xy) \end{bmatrix}$, em $(0, 1)$ tem-se $\det f'(0, 1) = \det \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 4 \neq 0$. Logo, o Teorema da Função Inversa garante que existem vizinhanças de $(x, y) = (0, 1)$ e de $(u, v) = (2, 3)$ onde f é uma bijecção com f^{-1} diferenciável. A função inversa $(x, y) = f^{-1}(u, v)$ dá a parametrização pedida.*

Comentário: Em alternativa, poder-se-ia usar o Teorema da Função Implícita, vendo X como o nível zero de $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, u, v) = (2y^2 - x^2 - u, x^4 - \sin(xy) + 3 - v)$.

□

(b) Para a parametrização da alínea (a), calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(2, 3)$.

Resolução: *Pelo Teorema da Função Inversa (ou pela regra da cadeia), a derivada de $f^{-1}(u, v)$ em $(u, v) = (2, 3) = f(0, 1)$, é a inversa da derivada de $f(x, y)$ em $(x, y) = (0, 1)$:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(2,3) & \frac{\partial x}{\partial v}(2,3) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(2,3) & \frac{\partial y}{\partial v}(2,3) \end{bmatrix} &= (f^{-1})'(2, 3) = [f'(0, 1)]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

pelo que $\frac{\partial x}{\partial v}(2, 3) = -1$. □

(2) Quais são os conjuntos de nível da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (e^{x^2} + y^2, z)$, que pode garantir serem variedades de dimensão 1?

Resolução: *A função g é de classe C^1 (até mesmo C^∞) e tem*

$$g'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2} & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Esta matriz jacobiana tem característica máxima quando a primeira linha não se anula, ou seja quando $(x, y) \neq (0, 0)$. Os níveis de g que contêm pontos da forma $(0, 0, z)$ são os níveis $g^{-1}(1, z)$. Os níveis $g^{-1}(a, b)$ com $a < 1$ são conjuntos vazios. Todos os outros níveis $g^{-1}(a, b)$ com $a > 1$ são garantidamente variedades de dimensão 1(=3-2), pois satisfazem a definição de variedade – são o nível zero da função $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $h(x, y, z) = g(x, y, z) - (a, b)$, cuja derivada tem característica máxima em todos os pontos desse nível.

Comentário: A equação $e^{x^2} + y^2 = 1$ só é satisfeita pelo ponto $(x, y) = (0, 0)$ porque $e^{x^2} \geq 1$, $\forall x$, e $e^{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Conclui-se que o nível $g^{-1}(1, c)$ (para cada $c \in \mathbb{R}$) é o conjunto com um só ponto $\{(0, 0, c)\}$, o qual pode ser visto como uma variedade de dimensão zero.

$\square$

(3) Seja C a curva em $\mathbb{R}^2$ definida pela equação

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9\ .$$

(a) Determine os pontos de C que se encontram mais próximos da origem.

Resolução: *A curva C é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$ dada como o nível zero da função $\varphi(x,y) = 5x^2+8xy+5y^2-9$. Procuram-se os pontos de C cujo quadrado da distância à origem, $f(x,y) = x^2+y^2$, é mínimo. Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, qualquer um desse pontos de mínimo é ponto crítico de $F(x,y) = x^2+y^2+\lambda(5x^2+8xy+5y^2-9)$ sobre X para algum $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{cases} 2x + \lambda(10x+8y) = 0 \\ 2y + \lambda(8x+10y) = 0 \\ 5x^2+8xy+5y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ x^2 = y^2 \\ 10y^2 + 8xy = 9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x = y \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \textit{ou} \quad \begin{cases} \dots \\ x = -y \\ y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Estas soluções correspondem a valores $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$ ou $f(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \mp\frac{3}{\sqrt{2}}) = 9$, pelo que os pontos de C mais próximos da origem são $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Comentário: A curva C pode ser vista como uma elipse distorcida de equação $(5x+4y)^2 + 9y^2 = 45$.

$\square$

(b) Calcule o espaço tangente a C no ponto $(1,-2)$.

Resolução: *A curva C é o nível zero da função $\varphi(x,y) = 5x^2+8xy+5y^2-9$, cujo gradiente grad $\varphi(x,y) = (10x+8y, 8x+10y)$ gera o espaço normal a C em $(x,y) \in C$. No ponto $(1,-2)$ o espaço normal é o subespaço dos múltiplos de $(-6,-12)$, pelo que o espaço tangente a C nesse ponto é gerado pelo vector ortogonal $(12,-6)$: $T_{(1,-2)}C = \{a(2,-1) \mid a \in \mathbb{R}\}$.*

Comentário: A equação da recta $T_{(1,-2)}C$ é $x + 2y = 0$.

$\square$

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Qualquer união de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Verdadeira $\square$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *Por exemplo,* $]0,1[$ *é um conjunto aberto que é a união dos conjuntos fechados* $\{x\}$, *com* $x \in]0,1[$. *(O intervalo* $]0,1[$ *também pode ser visto como a união numerável dos intervalos fechados* $[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$, *com* $n \in \{2,3,4,\ldots\}$.*)* $\square$

(b) A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, não é diferenciável em $(0,0)$.

Verdadeira $\boxed{X}$ Falsa $\square$

Resolução: *Uma vez que* $f(x,0) = f(0,y) = 0$, $\forall x,y$, *as derivadas parciais de* f *em ordem a* x *e a* y *são zero no ponto* $(0,0)$. *Se* f *fosse diferenciável em* $(0,0)$, *então a sua derivada seria dada pela matriz jacobiana*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = [0 \quad 0] \ ,$$

pelo que a derivada seria zero. No entanto, pondo a derivada igual a zero na expressão do limite envolvido na definição de derivada, e escolhendo, por exemplo, a direcção da diagonal positiva para h, *tem-se*

$$\lim_{(h,h)\to 0} \frac{|f(h,h) - f(0,0) - 0|}{|(h,h)|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h^2|}}{\sqrt{h^2+h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

o que não é zero como deveria ser se f *fosse diferenciável em* $(0,0)$. $\square$

(c) Há uma função invertível $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $\det f'(p) = 0$ para certo $p \in \mathbb{R}^n$ e com inversa diferenciável.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pode ser invertível mesmo que a sua derivada seja singular num ponto p (por exemplo, $f(x) = x^3$ tem $f'(0) = 0$ e é invertível), mas nesse caso a sua inversa nunca poderá ser diferenciável em $f(p)$. Isto porque, se f^{-1} fosse diferenciável em $f(p)$, então, pela regra da cadeia aplicada a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$, seria $(f^{-1})'(f(p)) \cdot f'(p) = \mathrm{Id}$ o que mostra que nenhuma das duas matrizes $(f^{-1})'(f(p))$ e $f'(p)$ poderia ser singular.* □

(d) A imagem X da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (2\cos t, 3\sin t, 0)$, é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *A imagem X da função f é o conjunto dos pontos (x, y, z) que satisfazem as equações $9x^2 + 4y^2 = 36$ e $z = 0$, o qual é uma elipse no plano xy de $\mathbb{R}^3$. Este conjunto é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$ porque é o nível zero da função de classe C^1, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (9x^2 + 4y^2 - 36, z)$, cuja derivada $F'(x, y, z) = \begin{bmatrix} 18x & 8y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem característica máxima em todos os pontos de X (note-se que os pontos com $x = y = 0$ não pertencem a X).* □

(e) Qualquer variedade compacta X de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ contém pelo menos um ponto $p \in X$ que minimiza a distância à origem.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *A função distância à origem é contínua. Pelo teorema de Weierstrass, ela assume sempre máximo e mínimo quando restrita a qualquer subconjunto compacto. Em particular, há sempre pelo menos um ponto que minimiza a função distância à origem numa variedade compacta.* □