Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 1 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2005

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 17 de Outubro, 18h30-19h30, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a superfície $X \subset \mathbb{R}^4$ definida pelas equações

$$\begin{cases} u = & 2y^2 - x^2 \\ v = & x^4 - \sin(xy) + 3 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que existe uma vizinhança do ponto $(x, y, u, v) = (0, 1, 2, 3)$ em X onde é possível parametrizar X escrevendo (x, y) como função de (u, v).

(b) Para a parametrização da alínea (a), calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(2, 3)$.

(2) Quais são os conjuntos de nível da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (e^{x^2} + y^2, z)$, que pode garantir serem variedades de dimensão 1?

(3) Seja C a curva em $\mathbb{R}^2$ definida pela equação

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \ .$$

(a) Determine os pontos de C que se encontram mais próximos da origem.

(b) Calcule o espaço tangente a C no ponto $(1, -2)$.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Qualquer união de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, não é diferenciável em $(0, 0)$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma função invertível $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com $\det f'(p) = 0$ para certo $p \in \mathbb{R}^n$ e com inversa diferenciável.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) A imagem X da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (2\cos t, 3\sin t, 0)$, é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Qualquer variedade compacta X de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ contém pelo menos um ponto $p \in X$ que minimiza a distância à origem.

Verdadeira ☐ Falsa ☐