Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III A

TESTE 1 – 10 DE OUTUBRO DE 2005 – 15:10-16H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação das alíneas em cada problema igualmente repartida.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 2ª feira, 17 de Outubro, 18h30-19h30, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (\cos(\pi x) + y, \sin(\pi x) - y) \ .$$

(a) Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(1,0)$.

Resolução: *A função f é de classe C^1 e tem*

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} -\pi\sin(\pi x) & 1 \\ \pi\cos(\pi x) & -1 \end{bmatrix} \ .$$

No ponto $(1,0)$ tem-se

$$\det f'(1,0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix} = \pi \neq 0 \ ,$$

pelo que o Teorema da Função Inversa garante que f é localmente invertível numa vizinhança de $(1,0)$. □

(b) Calcule a derivada da função inversa no ponto $(-1,0)$.

Resolução: *Como $f(1,0) = (-1,0)$, pela regra da cadeia, tem-se que*

$$(f^{-1})'(-1,0) = \big(f'(1,0)\big)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\pi & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} & -\frac{1}{\pi} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

□

(2) A equação

$$xyz + e^z + xz^4 - x = 1$$

define uma variedade que pode ser representada, nalguma vizinhança do ponto $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, como o gráfico de uma função $z = f(x, y)$ (não se pede que demonstre esta afirmação). Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

Resolução: *Seja* $G(x, y, z) = xyz + e^z + xz^4 - x$. *Como* $G(x, y, f(x, y)) = 1$ *em todos os pontos* (x, y) *de uma vizinhança de* $(0, 0)$, *derivando em ordem a* x *pela regra da cadeia obtém-se que*

$$yz + (f(x, y))^4 - 1 + \left(xy + +e^{f(x,y)} + 4x(f(x, y))^3\right) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ .$$

Avaliando em $(x, y) = (0, 0)$, *onde* $z = f(0, 0) = 0$, *fica*

$$-1 + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1 \ .$$

$\square$

(3) Considere o conjunto

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = yz + 2\} \ .$$

(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão 2.

Resolução: *O conjunto X é o nível zero da função continuamente diferenciável $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y, z) = x - yz - 2$, cuja jacobiana*

$$\begin{bmatrix} 1 & -z & -y \end{bmatrix}$$

tem característica máxima em todos os pontos. Portanto, pela definição de variedade, X é uma variedade de dimensão 2(=3-1) em $\mathbb{R}^3$. $\square$

(b) Calcule a distância de X à origem.

Resolução: *A distância de X à origem é a raiz quadrada do mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre X. Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, para cada um dos eventuais pontos de mínimo a, deverá existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a é ponto crítico de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x - yz - 2)$. Procuram-se então os pontos críticos de F sobre X:*

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda y = 0 \\ x = yz + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda \\ 2y + 2xz = 0 \\ 2z + 2xy = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y = -xz \\ z(1 - x^2) = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} - \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} - \\ y = -z \\ x = 1 \\ 1 = y^2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} - \\ y = z \\ x = -1 \\ -3 = y^2 - \textit{impossível} \end{cases}$$

Os pontos candidatos a extremos relativos de $f|_X$ são $(2, 0, 0)$, $(1, 1, -1)$ e $(1, -1, 1)$. Como $f(2, 0, 0) = 4$ e $f(1, 1, -1) = 3 = f(1, -1, 1)$, conclui-se que a distância é $\sqrt{3}$. $\square$

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Qualquer subconjunto fechado de um conjunto compacto em $\mathbb{R}^n$ é compacto.

Verdadeira $\boxed{X}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Os conjuntos compactos em $\mathbb{R}^n$ são os conjuntos limitados e fechados. Se A é um subconjunto de um compacto C, então A é também limitado. Sabendo que A é fechado, conclui-se que A é compacto.* $\square$

(b) Se a jacobiana em $p \in \mathbb{R}^{n+m}$ de uma função continuamente diferenciável $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ tem todas as entradas não nulas, então o Teorema da Função Implícita é aplicável a F perto desse ponto p.

Verdadeira $\boxed{}$ Falsa $\boxed{X}$

Resolução: *O Teorema da Função Implícita não é necessariamente aplicável, pois a condição das entradas de $F'(p)$ serem todas não nulas não garante que haja uma submatriz $m \times m$ com determinante diferente de zero. Por exemplo, o Teorema da Função Implícita nunca é aplicável à função $F(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z)$ que tem $F'(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.* $\square$

(c) Há uma variedade X em $\mathbb{R}^3$ cujos espaço tangente e espaço normal num determinado ponto de X têm ambos dimensão 2.

Verdadeira ☐ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Uma vez que os espaços tangente e normal a X num ponto são complementos ortogonais um do outro, a soma das suas dimensões tem que ser a dimensão do espaço ambiente, que é 3 neste caso.* □

(d) Qualquer função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ restrita à parábola X de equação $x = y^2$ assume um valor máximo sobre X.

Verdadeira ☐ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Por exemplo, a função $f(x, y) = x$ não assume valor máximo sobre X.* □

(e) Há uma função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ cujo nível zero é uma variedade de dimensão 3.

Verdadeira $\boxed{\text{X}}$ Falsa ☐

Resolução: *Por exemplo, a função $f(x, y, z, t) = (0, t)$ tem por nível zero o subespaço xyz em $\mathbb{R}^4$ o qual é uma variedade de dimensão 3.* □