

O INTEGRAL DE LEBESGUE

RUI LOJA FERNANDES

RESUMO. Estas notas contêm uma introdução à teoria do integral introduzido por Lebesgue. Elas formam como que um capítulo 3,5 do livro de M. Spivak “Calculus on Manifolds”. O seu objectivo é servir como texto de apoio aos alunos da Turma E de Análise Matemática III. Apesar de existirem excelentes textos (ver bibliografia) que podem ser utilizados como introdução à teoria do integral de Lebesgue, não conheço nenhum que possua as características do livro de Spivak, e essenciais para o funcionamento deste projecto: (i) elementar; (ii) sucinto e (iii) que exija uma boa dose de trabalho individual. São, pois, estas as características que pretendi dar a estas notas. É claro que as dificuldades e virtudes mencionadas no prefácio desse livro sobre esta metodologia aplicam-se aqui *mutatis mutandis*.

Os pré-requisitos para estas notas são, portanto, os três primeiros capítulos do livro de Spivak. Uma citação do tipo [S, thm 3-10] refere-se ao teorema 3-10 desse livro.

Lisboa, Outubro de 2004
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico

CONTEÚDO

| | |
|---|----|
| Introdução | 3 |
| σ -álgebras e funções σ -aditivas | 5 |
| Medida de Lebesgue | 7 |
| Funções Mensuráveis | 12 |
| O Integral de Lebesgue | 15 |
| Teoremas de Convergência | 18 |
| Relação com o Integral de Riemann | 22 |
| Bibliografia | 25 |

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos introduzir uma generalização do integral de Riemann e que se chama *integral de Lebesgue*¹. Esta generalização vai permitir, por exemplo, estender a classe das funções integráveis. Um exemplo simples de uma função $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável à Lebesgue que não é integrável à Riemann é dado pela função de Dirichelet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

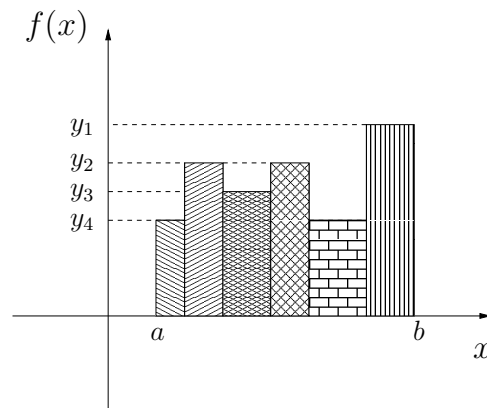
Esta extensão do conceito de integral tem inúmeras vantagens práticas algumas das quais veremos mais tarde.

Uma forma simples de ilustrar a diferença entre o integral de Lebesgue e o de Riemann é a seguinte analogia. Suponhamos que tínhamos uma saco cheio de moedas de euro e que pretendíamos saber a quantia que temos no saco. Podemos contar as moedas de duas formas distintas:

- (i) Retiramos as moedas uma a uma do saco e vamos adicionando os seus valores;
- (ii) Agrupamos todas as moedas do saco pelos seus valores, formando um grupo de moedas de 5 cêntimos, outro grupo de 10 cêntimos, etc. Contamos as moedas em cada grupo, multiplicamos pelos seus valores e somamos;

A segunda forma de contagem (que corresponde ao integral de Lebesgue) é muito mais eficiente do que a primeira forma de contagem (correspondente ao integral de Riemann), embora ambas forneçam o mesmo valor. Note-se que para descrever (ii) tivemos de usar uma linguagem um pouco mais elaborada do que para descrever (i). Como veremos adiante, a definição do integral de Lebesgue também envolve, de facto, um pouco mais de conceptualização do que a definição do integral de Riemann. No entanto, o integral de Lebesgue é bastante mais eficiente que o integral de Riemann, tal como o segundo processo de contagem. Por fim, as funções integráveis à Riemann também são integráveis à Lebesgue e o valor do integral é o mesmo.

A título de exemplo, consideremos uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que assume um número finito de valores, como ilustrado na figura seguinte:

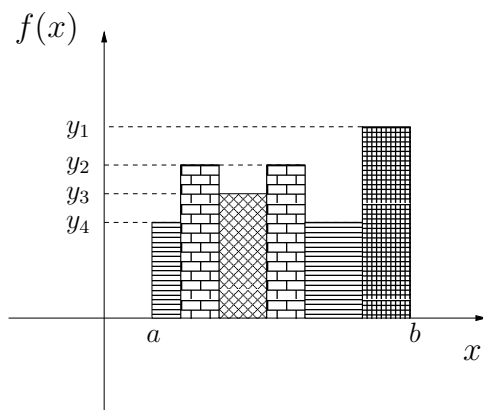


¹O matemático francês Henri Lebesgue (1875-1941) introduziu a nova noção de integral na sua tese de doutoramento, entregue na Universidade de Nancy em 1902. Mais tarde, seria professor na Sorbonne, em Paris. Lebesgue foi um dos maiores analistas da primeira metade do Século XX.

Para calcularmos o integral pela definição de Riemann, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos $[x_k, x_{k+1}]$ onde a função é constante, multiplicar o valor que a função toma em cada sub-intervalo pelo seu comprimento, e somar:

$$\int_a^b f dx = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Por outro lado, para calcularmos o integral pela definição de Lebesgue, precisamos de introduzir primeiro a noção de *medida* ou *volume* de subconjuntos de \mathbb{R}^n : esta não é mais que uma função que a um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ associa um número não negativo $\mu(A)$. Depois, determinamos qual é a pré-imagem E_k de cada valor y_k que a função assume, multiplicamos a medida (ou volume) dessa pré-imagem por esse valor, e somamos:



$$\int_a^b f d\mu = \sum_{k=1}^m y_k \mu(E_k).$$

Para uma função como a da figura, estes dois métodos dão o mesmo valor para o integral. Mas, para uma função mais complexa, tal como a função de Dirichelet, a diferença é dramática: a definição de Riemann não faz sequer sentido!

Como vemos, uma parte essencial da definição do integral de Lebesgue reside na introdução da medida de um conjunto. Esta função deve satisfazer certa propriedades naturais. Por exemplo, gostaríamos certamente que:

- (i) Para um retângulo $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ em \mathbb{R}^n a sua medida é dada por $\mu(A) = (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)$;
- (ii) Se A é a união de subconjuntos A_1, A_2, \dots de \mathbb{R}^n , disjuntos dois a dois, então a sua medida é $\mu(A) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$;
- (iii) Se A é um conjunto com medida $\mu(A)$ então a sua translação $x + A = \{x + y : y \in A\}$ deverá ter a mesma medida: $\mu(x + A) = \mu(A)$.

Infelizmente não existe tal função!!!

A primeira parte do nosso estudo do integral de Lebesgue será dedicado à resolução deste problema, e consiste em escolher uma colecção de subconjuntos de \mathbb{R}^n que contém os intervalos, e aonde é possível definir uma tal função de medida. Na segunda parte introduzimos o integral de Lebesgue e estudamos algumas das suas propriedades básicas.

σ -ÁLGEBRAS E FUNÇÕES σ -ADITIVAS

Definição A.1. Uma família \mathfrak{A} de subconjuntos de X diz-se uma **álgebra de conjuntos** se $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ e

$$A, B \in \mathfrak{A} \implies A \cup B, A - B \in \mathfrak{A}.$$

Uma álgebra \mathfrak{A} diz-se uma **σ -álgebra** se

$$A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \implies \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}.$$

Note que se \mathfrak{A} é uma álgebra de conjuntos e $A, B \in \mathfrak{A}$ então

$$A \cap B = A - (A - B) \in \mathfrak{A},$$

logo \mathfrak{A} é fechada para intersecções. Da mesma forma, para qualquer $A \in \mathfrak{A}$:

$$A^c = X - A \in \mathfrak{A},$$

logo \mathfrak{A} é fechada para a passagem ao complementar. Por outro lado, se \mathfrak{A} é uma σ -álgebra é um exercício simples mostrar que se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ então $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.

Exemplos A.2.

1. Seja \mathfrak{A} a colecção de todos os subconjuntos de um conjunto X . É claro que $\emptyset, X \in \mathfrak{A}$ e que \mathfrak{A} é fechada para uniões arbitrárias e diferenças de conjuntos, logo \mathfrak{A} é uma σ -álgebra.
2. Seja \mathfrak{A} a colecção formada por todas as uniões finitas $I_1 \cup \dots \cup I_m$ de rectângulos de \mathbb{R}^n . Então \mathfrak{A} é uma álgebra de conjuntos mas não é uma σ -álgebra (exercício).

A noção de medida que queremos discutir baseia-se na seguinte definição:

Definição A.3. Seja \mathfrak{A} uma álgebra. Uma função $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ não-constante diz-se **aditiva** se, dados $A, B \in \mathfrak{A}$,

$$A \cap B = \emptyset \implies \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B).$$

A proposição seguinte fornece algumas propriedades elementares das funções aditivas. A sua demonstração fica como exercício.

Proposição A.4. Seja \mathfrak{A} uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ uma função aditiva. Se $A, B, A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathfrak{A}$ então:

- (i) $\phi(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\phi(B) \leq \phi(A)$ se $B \subset A$;
- (iii) $\phi(A - B) = \phi(A) - \phi(B)$ se $B \subset A$ e $\phi(B) < +\infty$;
- (iv) $\phi(A_1 \cup A_2) = \phi(A_1) + \phi(A_2) - \phi(A_1 \cap A_2)$ se $\phi(A_1 \cap A_2) < +\infty$;
- (v) $\phi(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \phi(A_1) + \dots + \phi(A_k)$ se $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$;

Note que, em princípio, não podemos dizer nada sobre o comportamento das funções aditivas para conjuntos A que são uniões (mesmo disjuntas) de conjuntos A_1, A_2, \dots . Para isso precisamos de mais uma definição:

Definição A.5. Seja \mathfrak{A} uma álgebra. Uma função $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ aditiva diz-se **σ -aditiva** se, para $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ com $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$, temos

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j) \implies \phi\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

Uma propriedade importante das funções σ -aditivas é a de podermos calculá-las por aproximação. Mais precisamente temos:

Teorema A.6. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ uma função σ -aditiva. Se $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ com $A_i \in \mathfrak{A}$ e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ então*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi(A_j) = \phi(A).$$

Demonstração. Seja $B_1 = A_1$ e defina-se para $j = 2, 3, \dots$

$$B_j = A_j - A_{j-1}.$$

Claramente $B_j \in \mathfrak{A}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ se $i \neq j$ e $A_j = B_1 \cup \dots \cup B_j$. Logo

$$\phi(A_j) = \sum_{k=1}^j \phi(B_k).$$

Como ϕ é σ -aditiva e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j$ obtemos

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi(A_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(B_j) = \phi\left(\bigcup_{j=1}^{+\infty} B_j\right) = \phi(A).$$

□

Definição A.7. *Um espaço de medida é um par (\mathfrak{M}, μ) onde \mathfrak{M} é uma σ -álgebra num conjunto X e $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ é uma função σ -aditiva. Os elementos de \mathfrak{M} dizem-se **conjuntos mensuráveis** e a função μ diz-se uma **medida** em X .*

Como um exemplo simples de um espaço de medida (\mathfrak{M}, X) mencionamos a **medida discreta** num conjunto X . A σ -álgebra \mathfrak{M} é formada por todos os subconjuntos $A \subset X$, e a medida de um subconjunto $A \subset X$ é

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{cardinal de } A, & \text{se } A \text{ é finito;} \\ +\infty, & \text{se } A \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Esta medida é muito importante, por exemplo, na Teoria das Probabilidades.

Uma boa parte do nosso estudo incidirá sobre uma certa medida em \mathbb{R}^n , a chamada medida de Lebesgue. Para esta medida, os rectângulos de \mathbb{R}^n são conjuntos mensuráveis e a sua medida de Lebesgue coincide com os seu volume n -dimensional [S, chp 3]. Estudamos esta medida na próxima secção.

Problemas

A.1. *Seja \mathfrak{A} uma σ -álgebra. Mostre que se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$ então $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$.*

A.2. *Demonstre a Proposição A.4.*

A.3. *Seja \mathfrak{A} uma álgebra e $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ uma função σ -aditiva. Se $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \in \mathfrak{A}$, $\phi(A_1) < +\infty$ e $A = \bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ mostre que*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \phi(A_j) = \phi(A).$$

A.4. *Seja \mathfrak{A} a família dos subconjuntos de \mathbb{R}^n que são união de um número finito de rectângulos disjuntos. Se $A = \bigcup_{j=1}^N I_j$ é um elemento de \mathfrak{A} defina*

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^N v(I_j).$$

- (a) *Mostre que \mathfrak{A} é uma álgebra de conjuntos;*
- (b) *Mostre que $\mu^* : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função aditiva;*

A.5. *Seja \mathfrak{A} uma σ -álgebra com um número infinito de elementos. Será que \mathfrak{A} pode ser numerável?*

MEDIDA DE LEBESGUE

O nosso próximo objectivo é construir uma σ -álgebra \mathfrak{A} em \mathbb{R}^n , que contém todos os rectângulos, e uma medida $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tal que (i) para todo o rectângulo I , $\mu(I) = v(I)$ é o seu volume n-dimensional e (ii) μ é invariante por translação: $\mu(x + A) = \mu(A)$.

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ consideramos coberturas de A por rectângulos abertos $\{I_1, I_2, \dots\}$ e definimos

$$\mu^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{+\infty} v(I_n),$$

onde o inf é tomado sobre todas as coberturas numeráveis de A por rectângulos abertos. A função μ^* fica assim definida na σ -álgebra \mathfrak{A} formada por todos os subconjuntos de \mathbb{R}^n e costuma designar-se por **medida exterior de Lebesgue**.

Proposição A.8. *A medida exterior de Lebesgue $\mu^* : \mathfrak{A} \rightarrow [0, +\infty]$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (ii) $\mu^*(B) \leq \mu^*(A)$ se $B \subset A$;
- (iii) $\mu^*(I) = v(I)$ se $I \subset \mathbb{R}^n$ é um rectângulo;
- (iv) $\mu^*(x + A) = \mu^*(A)$ se $x \in \mathbb{R}^n$;
- (v) $\mu^*(A) = 0$ sse A é um conjunto de medida nula;
- (vi) Se $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ então $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j)$.

Demonstração. As demonstrações de (i)-(v) são deixadas como exercício. Para demonstrar (vi) podemos assumir que $\mu^*(A_j) < +\infty$, para todo o j . Dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura $I_{j,k}$ ($k = 1, 2, \dots$) de A_j por rectângulos abertos, tal que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v(I_{j,k}) < \mu^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Os $I_{j,k}$ ($j, k = 1, 2, \dots$) formam uma cobertura de A por rectângulos abertos, logo

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} v(I_{j,k}) < \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

Um função que satisfaz a desigualdade (vi) diz-se uma *função sub-aditiva*. Existem exemplos de subconjuntos $A_i \subset \mathbb{R}^n$, com $A_j \cap A_k = \emptyset$ se $j \neq k$, para os quais esta desigualdade é estrita, i.e., a medida exterior de Lebesgue não é σ -aditiva.

Exemplo A.9. *Definimos uma relação de equivalência no intervalo $[0, 1]$ estipulando que $x \sim y$ sse $x - y \in \mathbb{Q}$ (é fácil verificar que esta relação binária é de facto transitiva, simétrica e reflexiva).*

Seja $E \subset [0, 1]$ um conjunto formado por exactamente um elemento de cada classe de equivalência de \sim . A existência de E é garantida pelo axioma da escolha. Este conjunto tem as seguintes propriedades:

- (a) $(q + E) \cap (r + E) = \emptyset$ se $q, r \in \mathbb{Q}$ e $q \neq r$;
- (b) $\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + E)$;
- (c) $\mu^*(E) > 0$;

De facto, se $q + x = r + y$ onde $x, y \in E$, $q, r \in \mathbb{Q}$, com $x \neq y$ e $q \neq r$, então temos $x \sim y$, o que não pode acontecer pois E contém um elemento de cada classe de equivalência de \sim . Logo (a) é verdadeira. Por outro lado, se $x \in \mathbb{R}$ então existe um $q \in \mathbb{Q}$, tal que $x - q \in [0, 1]$ e, portanto, existe $e \in E$ tal que $x - q \sim e$. Concluimos que $x \in q' + E$ para algum racional q' , e (b) é verdadeira. Como \mathbb{R} não tem medida nula, (b) mostra que E também não tem medida nula. Pela Proposição A.8 (v), concluimos que $\mu^(E) > 0$.*

Dada uma enumeração $\{q_1, q_2, q_3, \dots\}$ dos racionais entre 0 e 1, definimos subconjuntos $A_j \subset [0, 2]$ por

$$A_j = q_j + E, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Seja $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$. Afirmamos que

$$\mu^*(A) < \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

é claro que $A \subset [0, 2]$ logo, pela proposição A.8 (ii), $\mu^*(A) \leq 2$. Por outro lado, pela proposição A.8 (iv), os A_j têm todos a mesma medida exterior: $\mu^*(A_j) = \mu^*(E) > 0$. Assim, $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) = +\infty$.

Este exemplo mostra que a função μ^* não é σ -aditiva na σ -álgebra formada por todos os subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Observação A.10. Na realidade, as únicas propriedades da função μ que usámos no exemplo são as enumeradas na Proposição A.8. Assim, o exemplo mostra que não existe uma função σ -aditiva definida na σ -álgebra formada por todos os subconjuntos de \mathbb{R}^n , invariante por translação, e que para os rectângulos coincide o seu volume n -dimensional.

Vamos procurar uma σ -álgebra mais pequena, que ainda contenha os rectângulos $I \subset \mathbb{R}^n$, e na qual μ^* é σ -aditiva. Para isso, introduzimos:

Definição A.11. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **mensurável à Lebesgue** se para todo o $\varepsilon > 0$ existem rectângulos $\{I_1, I_2, \dots\}$ tais que a sua união $U = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$ satisfaz⁽²⁾

$$\mu^*(A \Delta U) < \varepsilon.$$

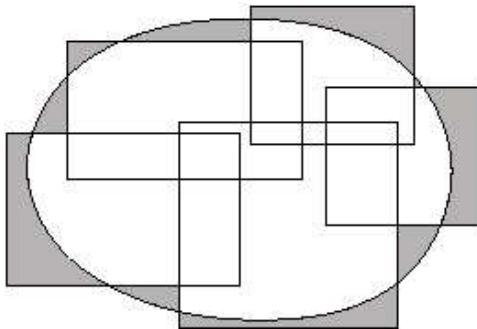


FIGURA A.1. O conjunto $A \Delta U$.

Observe-se que nesta definição é indiferente supor que os rectângulos são disjuntos. Em termos geométricos, podemos dizer que um conjunto é mensurável à Lebesgue se puder ser bem aproximado, em termos de medida exterior, por uma união numerável de rectângulos. De facto temos o seguinte resultado cuja demonstração deixamos como exercício:

Lema A.12. Sejam $A, B \in \mathbb{R}^n$ com $\mu^*(A) < +\infty$ ou $\mu^*(B) < +\infty$. Então:

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \mu^*(A \Delta B)$$

Daqui em diante designamos por \mathfrak{M} a família dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue.

²Usamos o símbolo $A \Delta B$ para designar a *diferença simétrica* dos conjuntos A e B :

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Teorema A.13. *A família \mathfrak{M} dos subconjuntos de \mathbb{R}^n mensuráveis à Lebesgue é uma σ -álgebra. A restrição de μ^* a \mathfrak{M} é uma função $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ σ -aditiva.*

Demonstração. Designemos por *conjuntos elementares* os conjuntos formados por uniões finitas, disjuntas, de rectângulos. Como vimos num problema da secção anterior, a família \mathfrak{A} dos conjuntos elementares é uma álgebra e a restrição de μ^* a \mathfrak{A} é aditiva.

Para efeitos da demonstração vamos ainda designar por \mathfrak{M}_F a família dos subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ que podem ser aproximados por um conjunto elementar: $A \in \mathfrak{M}_F$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $E \in \mathfrak{A}$ tal que

$$\mu^*(A \triangle E) < \varepsilon.$$

Precisamos do seguinte lema:

Lema A.14. *\mathfrak{M}_F é uma álgebra e a restrição de μ^* a \mathfrak{M}_F é uma função σ -aditiva. Temos, ainda, que:*

- (a) *Se $A \in \mathfrak{M}$ e $\mu^*(A) < +\infty$ então $A \in \mathfrak{M}_F$;*
- (b) *Se $A \in \mathfrak{M}$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, com $A_j \in \mathfrak{M}_F$ disjuntos dois a dois;*
- (c) *Se $A_j \in \mathfrak{M}_F$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.*

Assumindo que este lema é verdadeiro, passemos à demonstração do teorema.

Primeiro verificamos que \mathfrak{M} é uma σ -álgebra: se $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{M}$ são conjuntos mensuráveis, então, pela propriedade (b) do lema, existem conjuntos $A_{ik} \in \mathfrak{M}_F$ tais que:

$$A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{ik}.$$

Logo, pela propriedade (c) do lema,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i,k=1}^{\infty} A_{ik} \in \mathfrak{M}.$$

Assim, \mathfrak{M} é fechada para uniões numeráveis. Por outro lado, se $A, B \in \mathfrak{M}$ então temos as decomposições

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j, \quad B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} B_k,$$

onde $A_j, B_k \in \mathfrak{M}_F$. Como \mathfrak{M}_F é uma álgebra, $A_j \cap B_k \in \mathfrak{M}_F$. Logo,

$$A \cap B = \bigcup_{j,k=1}^{+\infty} (A_j \cap B_k) \in \mathfrak{M}.$$

Assim, \mathfrak{M} também é fechada para intersecções finitas. Finalmente, para ver que \mathfrak{M}_F é fechada para diferenças, sejam $A, B \in \mathfrak{M}$. Observe que podemos escrever

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j,$$

onde $A_j \in \mathfrak{M}_F$ e $\mu^*(A_j) < +\infty$. Assim, vemos que:

$$A - B = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (A_j - B) = \bigcup_{j=1}^{+\infty} (A_j - (B \cap A_j)).$$

Note que, pela propriedade (a) do Lema, $B \cap A_j \in \mathfrak{M}_F$, pois $B \cap A_j \in \mathfrak{M}$ (já vimos que \mathfrak{M} é fechada para intersecções) e $\mu^*(B \cap A_j) \leq \mu^*(A_j) < +\infty$. Como \mathfrak{M}_F é uma álgebra, segue-se que $A_j - (B \cap A_j) \in \mathfrak{M}_F$ e, pela propriedade (c) do Lema, concluímos que $A - B \in \mathfrak{M}$.

Vejam agora que μ^* restrita a \mathfrak{M} é σ -aditiva: Se $A_j \in \mathfrak{M}$ são disjuntos, $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathfrak{M}$, e existe um A_j com $\mu^*(A_j) = +\infty$, é claro que

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

Por outro lado, se todos os A_j têm $\mu^*(A_j) < +\infty$, então $A_j \in \mathfrak{M}_F$. Sendo μ^* sub-aditiva, temos, a priori,

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

Como μ^* é aditiva em \mathfrak{M}_F e $\bigcup_{j=1}^N A_j \subset A$, para todo o inteiro N , obtemos

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) = \sum_{j=1}^N \mu^*(A_j) \leq \mu^*(A).$$

Passando ao limite, concluímos que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j) \leq \mu^*(A).$$

Logo, também neste caso, temos

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mu^*(A_j).$$

Para terminar a demonstração do teorema falta a:

Demonstração do Lema A.14. Vejamos que \mathfrak{M}_F é uma álgebra: \mathfrak{M}_F é fechada para os complementares pois se $A \in \mathfrak{M}_F$ então $A^c \in \mathfrak{M}_F$, já que é válida a relação

$$A^c \triangle E^c = A \triangle E.$$

Por outro lado, \mathfrak{M}_F é fechada para uniões finitas: Se $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_F$, dado $\varepsilon > 0$, existem conjuntos elementares $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$ tais que

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como

$$(A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2) \subset (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2),$$

segue-se que

$$\mu^*((A_1 \cup A_2) \triangle (E_1 \cup E_2)) \leq \mu^*(A_1 \triangle E_1) + \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon.$$

Logo $A_1 \cup A_2 \in \mathfrak{M}_F$.

Sendo \mathfrak{M}_F fechada para reuniões e complementares, é claro que se $A, B \in \mathfrak{M}_F$ então $A - B = (A^c \cup B)^c \in \mathfrak{M}_F$. Como $\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{M}_F$ concluímos que \mathfrak{M}_F é uma álgebra.

Para ver que a restrição de μ^* a \mathfrak{M}_F é aditiva, sejam $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_F$ conjuntos disjuntos. Já sabemos que

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \leq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Basta pois mostrar a desigualdade oposta e para isso podemos assumir que $\mu^*(A_1), \mu^*(A_2) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha-se conjuntos elementares $E_1, E_2 \in \mathfrak{A}$ tais que:

$$\mu^*(A_1 \triangle E_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle E_2) < \varepsilon.$$

Como $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos

$$E_1 \cap E_2 \subset (A_1 \triangle E_1) \cup (A_2 \triangle E_2),$$

e concluímos que

$$\mu^*(E_1 \cap E_2) < 2\varepsilon.$$

Por outro lado, pelo lema A.12, também temos

$$|\mu^*(A_1) - \mu^*(E_1)| < \varepsilon, \quad |\mu^*(A_2) - \mu^*(E_2)| < \varepsilon.$$

Tomemos $A = A_1 \cup A_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. Visto que para conjuntos elementares a medida exterior é aditiva, obtemos

$$\mu^*(E) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) - \mu^*(E_1 \cap E_2) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon.$$

Finalmente, observamos que

$$A \Delta E \subset (A_1 \Delta E_1) \cup (A_2 \Delta E_2),$$

logo

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(E) - \mu^*(A \Delta E) > \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon.$$

Como ε era arbitrário, concluímos que

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) \geq \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

o que mostra que a restrição de μ^* a \mathfrak{M}_F é aditiva. A verificação das propriedades (i)-(iii) é deixada como exercício. \square

A função $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ costuma designar-se por medida de Lebesgue. A classe \mathfrak{M} dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue é uma classe bastante ampla e inclui muitos dos conjuntos que nos são familiares. Por exemplo, como \mathfrak{M} é uma σ -álgebra e contém os rectângulos $I \subset \mathbb{R}^n$, vemos que:

- (i) \mathfrak{M} contém os conjuntos abertos $O \subset \mathbb{R}^n$, pois todo o aberto de \mathbb{R}^n é uma união numerável de rectângulos;
- (ii) \mathfrak{M} contém os conjuntos fechados $F \subset \mathbb{R}^n$, pois todo o conjunto fechado é o complementar de um conjunto aberto.

É claro que \mathfrak{M} contém muitos outros conjuntos. Por exemplo, \mathfrak{M} contém os conjuntos que antes designamos por *conjuntos de medida nula*, pois estes são de facto os conjuntos mensuráveis à Lebesgue com medida de Lebesgue nula.

Problemas

A.6. Complete a demonstração da Proposição A.8.

A.7. Se $A, B \subset \mathbb{R}^n$ defina $d(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$. Mostre que esta função satisfaz:

- (a) $d(A, B) \geq 0$ e $d(A, A) = 0$;
- (b) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (c) $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$;
- (d) $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq d(A, B)$, se $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.

O que é que pode dizer se $d(A, B) = 0$?

A.8. Mostre que:

- (a) Se $A \in \mathfrak{M}$ e $\mu^*(A) < +\infty$ então $A \in \mathfrak{M}_F$;
- (b) Se $A \in \mathfrak{M}$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ com $A_j \in \mathfrak{M}_F$ disjuntos dois a dois;
- (c) Se $A_j \in \mathfrak{M}_F$ então $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{M}$.

A.9. Mostre que o conjunto E do exemplo A.9 não é mensurável à Lebesgue.

A.10. Mostre que um conjunto mensurável à Jordan é mensurável à Lebesgue. Será o inverso verdadeiro?

A.11. Considere conjuntos $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ onde cada A_i é uma união finita de intervalos obtidos indutivamente da seguinte forma: $A_0 = [0, 1]$ e A_{i+1} é obtido a partir de A_i retirando o terço do meio de cada intervalo de A_i . Assim:

$$\begin{aligned} A_0 &= [0, 1]; \\ A_1 &= [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]; \\ A_2 &= [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]; \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mostre que o **conjunto de Cantor** $C = \bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i$ é mensurável e não numerável. Qual é a sua medida de Lebesgue?

FUNÇÕES MENSURÁVEIS

Definição A.15. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é uma **função mensurável (à Lebesgue)** se o conjunto

$$f^{-1}(]c, +\infty[) = \{x \in A : f(x) > c\}$$

é mensurável para todo o $c \in \mathbb{R}$.

Na definição de função mensurável podíamos ter utilizado, em vez de $f^{-1}(]c, +\infty[)$, qualquer um dos conjuntos $f^{-1}([c, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, c])$ ou $f^{-1}(]-\infty, c])$:

Proposição A.16. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são todas equivalentes:

- (i) $\{x \in A : f(x) > c\}$ é mensurável, para todo o $c \in \mathbb{R}$;
- (ii) $\{x \in A : f(x) \geq c\}$ é mensurável, para todo o $c \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\{x \in A : f(x) < c\}$ é mensurável, para todo o $c \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\{x \in A : f(x) \leq c\}$ é mensurável, para todo o $c \in \mathbb{R}$.

Demonstração. As relações:

$$\begin{aligned} \{x \in A : f(x) \geq c\} &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{ x \in A : f(x) > c - \frac{1}{k} \right\} \\ \{x \in A : f(x) < c\} &= A - \{x \in A : f(x) \geq c\} \\ \{x \in A : f(x) \leq c\} &= \bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{ x \in A : f(x) < c + \frac{1}{k} \right\} \\ \{x \in A : f(x) > c\} &= A - \{x \in A : f(x) \leq c\} \end{aligned}$$

mostram que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i). □

Exemplos A.17.

1. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua então f é mensurável: como o conjunto $]c, +\infty[$ é aberto e f é contínua sabemos que $f^{-1}(]c, +\infty[)$ é aberto, logo é mensurável.
2. A função de Dirichelet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}; \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é mensurável à Lebesgue (porquê?).

3. Mais geralmente, a função característica $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow A$ de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é mensurável sse A é um conjunto mensurável. Assim, existem funções que não são mensuráveis.

Os próximos resultados permitem obter mais exemplos de funções mensuráveis.

Proposição A.18. *Se f, f_1, f_2, \dots são funções mensuráveis, então*

- (i) $|f|$ é mensurável;
- (ii) $\sup f_n, \inf f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ são mensuráveis;

Demonstração. A parte (i) segue-se da proposição anterior e da relação

$$\{x \in A : |f(x)| > c\} = \{x \in A : f(x) > c\} \cup \{x \in A : f(x) < -c\}.$$

Por outro lado, se $g(x) = \sup f_n(x)$, vemos que

$$\{x \in A : g(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in A : f_n(x) > c\}.$$

Assim $\sup f_n$ é mensurável. De igual modo mostra-se que $\inf f_n$ é mensurável. Como temos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf g_m$$

onde $g_m(x) = \sup \{f_n(x) : n \geq m\}$, vemos ainda que $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ é mensurável. De forma análoga mostra-se que $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ é mensurável. Portanto, (ii) também se verifica. \square

Corolário A.19. *Se f, g são funções mensuráveis, então $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ são funções mensuráveis. Em particular, $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = -\min(f, 0)$ são funções mensuráveis.*

Corolário A.20. *Se f_1, f_2, \dots são funções mensuráveis e $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, então f é mensurável.*

Se A é um conjunto mensurável designamos por $M(A)$ o conjunto das funções mensuráveis em A . O próximo resultado mostra que este conjunto é um espaço linear para as operações usuais de adição de funções e multiplicação de uma função por um número real.

Teorema A.21. *Sejam $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então a função*

$$h(x) = F(f(x), g(x))$$

é mensurável. Em particular, $f + g, f - g$ e $f \cdot g$ também são mensuráveis.

Demonstração. O conjunto $O_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) > c\}$ é aberto, pois F é contínua, logo podemos escrever

$$O_c = \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k,$$

onde cada I_k é um retângulo aberto de \mathbb{R}^2 :

$$I_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_k < x < b_k, c_k < y < d_k\}.$$

Como os conjuntos

$$\{x \in A : a_k < f(x) < b_k\} = \{x \in A : f(x) < b_k\} \cap \{x \in A : f(x) > a_k\}$$

$$\{x \in A : c_k < g(x) < d_k\} = \{x \in A : g(x) < d_k\} \cap \{x \in A : g(x) > c_k\}$$

são mensuráveis, segue-se que o conjunto

$$\{x \in A : (f(x), g(x)) \in I_k\} = \{x \in A : a_k < f(x) < b_k\} \cap \{x \in A : c_k < g(x) < d_k\}$$

é mensurável. Logo, também é mensurável o conjunto:

$$\{x \in A : F(f(x), g(x)) > c\} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{x \in A : (f(x), g(x)) \in I_k\}.$$

□

Assim, as operações mais comuns da Análise, incluindo as passagens ao limite, quando aplicadas a funções mensuráveis resultam em funções mensuráveis ⁽³⁾.

A seguinte classe de funções desempenha um papel importante na teoria.

Definição A.22. *Um **função simples** é uma função $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é finita, i.e., $s(x)$ assume um número finito de valores.*

As funções constantes são funções simples. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, então a função característica de A dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

é uma função simples. Qualquer função simples $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma combinação linear de funções características. De facto, se $\text{Im } s = \{c_1, \dots, c_m\}$, basta tomar

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = c_i\}$$

de forma que

$$s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}.$$

Vemos, ainda, que a função simples s é mensurável sse os conjuntos A_i são mensuráveis.

Qualquer função pode ser aproximada por funções simples. No caso de uma função mensurável, podemos escolher funções simples mensuráveis.

Teorema A.23. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então existe uma sucessão $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples tais que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Temos ainda que:

- (i) *Se f é mensurável, os s_k podem ser escolhidos mensuráveis;*
- (ii) *Se $f \geq 0$, podemos escolher $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão monótona crescente:*

$$0 \leq s_1(x) \leq s_2(x) \leq \dots \leq s_k(x) \leq \dots \leq f(x), \quad \forall x \in A.$$

Demonstração. Se $f \geq 0$ definimos, para cada $k = 1, 2, \dots$, conjuntos

$$A_{kj} = \left\{ x \in A : \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k} \right\}, \quad j = 1, \dots, k2^k,$$

$$B_k = \{x \in A : f(x) \geq k\}.$$

Basta então tomar

$$s_k = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{A_{kj}} + k \chi_{B_k}.$$

No caso geral, escrevemos $f = f^+ - f^-$, com $f^+, f^- \geq 0$. e construímos sucessões de funções simples s_k^+, s_k^- que convergem para f^+ e f^- . A sucessão de funções simples $s_k = s_k^+ - s_k^-$ converge para f . Se f é mensurável, os conjuntos A_{kj} e B_k são mensuráveis, logo os s_k são mensuráveis. □

Problemas

A.12. *Seja $f \in M(A)$. Mostre que se $B \subset A$ é mensurável então $f \in M(B)$.*

³No entanto, deve-se observar que a composição de duas funções mensuráveis pode não ser mensurável.

A.13. Seja $f \in M(A)$. Mostre que o conjunto

$$\{x \in A : f(x) = c\}$$

é mensurável para todo o real $c \in \mathbb{R}$.

A.14. Sejam $f, g \in M(A)$, e suponha que $g \neq 0$ em A . Mostre que a função $\frac{f}{g}$ é mensurável em A .

A.15. Seja f uma função mensurável. Mostre que se $g(x) = f(x)$, excepto num conjunto de medida nula, então g é mensurável.

A.16. Mostre que uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monótona é mensurável.

A.17. Seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis. Mostre que o conjunto dos pontos onde $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge é mensurável.

A.18. Construa um exemplo de uma função f para a qual não existe uma sucessão monótona crescente de funções simples $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = f$.

A.19. Mostre que se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada então existe uma sucessão $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de funções simples que converge uniformemente para f , i.e., tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \{|s_k(x) - f(x)| : x \in A\} = 0.$$

A.20. Mostre que se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com f mensurável e g contínua, então $g \circ f$ é mensurável. O que pode dizer de $f \circ g$?

O INTEGRAL DE LEBESGUE

Vamos agora definir o integral de Lebesgue de uma função mensurável sobre um conjunto mensurável, em situações bastante gerais.

Seja $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples mensurável, não negativa,

$$s = \sum_{i=1}^m c_i \chi_{A_i}, \quad c_i \geq 0.$$

Se $A \in \mathfrak{M}$ é um conjunto mensurável, definimos:

$$I_A(s) = \sum_{i=1}^m c_i \mu(A \cap A_i).$$

Definição A.24. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, não-negativa, definida num conjunto mensurável. O *integral de Lebesgue* de f em A é:

$$\int_A f d\mu = \sup \{I_A(s) : s \text{ é uma função simples, mensurável, com } 0 \leq s \leq f\}.$$

No caso de uma função simples $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verifica-se facilmente que

$$\int_A s d\mu = I_A(s).$$

Uma vez definido o integral para uma função não-negativa podemos definir o integral para uma função mensurável através da decomposição $f = f^+ - f^-$, onde as componentes f^\pm são as funções mensuráveis, não-negativas, definidas por:

$$f^+ = \max(f, 0), \quad f^- = -\min(f, 0).$$

Definição A.25. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, definida num conjunto mensurável. O *integral de Lebesgue* de f em A é

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu,$$

desde que pelo menos um dos integrais $\int_A f^\pm d\mu$ seja finito.

Note que o integral de Lebesgue de uma função assume valores em $[-\infty, +\infty]$. Dizemos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função integrável** em A , e escrevemos $f \in \mathcal{L}(A)$ se o integral de Lebesgue de f existe e é finito.

Na proposição seguinte fornecemos algumas propriedades elementares do integral de Lebesgue. A sua demonstração fica como exercício.

Proposição A.26. *Seja A um conjunto mensurável e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável.*

- (i) *Se f é limitada e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$;*
- (ii) *Se $f, g \in \mathcal{L}(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ para $x \in A$ então*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu;$$

- (iii) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para $x \in A$ e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A);$$

- (iv) *Se $\mu(A) = 0$ então*

$$\int_A f d\mu = 0;$$

- (v) *Se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $B \subset A$ é mensurável então $f \in \mathcal{L}(B)$.*

Uma outra propriedade importante do integral de Lebesgue é a σ -aditividade em relação ao domínio de integração.

Teorema A.27. *Seja f uma função mensurável não-negativa e $A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j$ uma união numerável de conjuntos mensuráveis, disjuntos dois a dois. Então*

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} f d\mu.$$

Demonstração. Pretende-se mostrar que a função $\phi : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(A) = \int_A f d\mu,$$

é uma função σ -aditiva.

Se $f = \chi_X$ é uma função característica dum conjunto mensurável X , então a σ -aditividade de ϕ não é mais que a σ -aditividade de μ .

Se $f = s$ é uma função simples, mensurável, não-negativa, então $s = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{X_k}$ com $c_k > 0$ e verifica-se também a σ -aditividade.

Seja então f mensurável, não-negativa. Se $0 \leq s \leq f$ é uma função simples, mensurável, então

$$\int_A s d\mu = \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} s d\mu \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{A_j} f d\mu,$$

logo ϕ é sub-aditiva:

$$\phi(A) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

Falta pois mostrar a desigualdade oposta. Como $\phi(A) \geq \phi(A_j)$ o resultado é verdadeiro se algum $\phi(A_j) = +\infty$. Podemos pois assumir que $\phi(A_j) < +\infty$, para todo o j . Então, para $N \in \mathbb{N}$ fixo, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher uma função simples $0 \leq s \leq f$, mensurável, tal que

$$\int_{A_j} s d\mu \geq \int_{A_j} f d\mu - \frac{\varepsilon}{N}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Logo, vemos que

$$\phi\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) \geq \int_{\bigcup_{j=1}^N A_j} s d\mu = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} s d\mu \geq \sum_{j=1}^N \phi(A_j) - \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, esta desigualdade mostra que

$$\phi\left(\bigcup_{j=1}^N A_j\right) \geq \sum_{j=1}^N \phi(A_j).$$

Finalmente, observando que $\bigcup_{j=1}^N A_j \subset A$, obtemos

$$\phi(A) \geq \sum_{j=1}^{+\infty} \phi(A_j).$$

□

Corolário A.28. *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $B \subset A$ com $\mu(A - B) = 0$, então*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu$$

Este resultado mostra que os conjuntos de medida nula não contribuem para o valor do integral. Assim, na teoria da integração, é frequente estarmos interessados em afirmações $P(x)$ que são verdadeiras excepto possivelmente para $x \in N$, onde N é um conjunto de medida nula. Dizemos nesse caso, que $P(x)$ é verdadeira quase em toda a parte, o que abreviamos para $P(x)$ é verdadeira q.t.p.

Problemas

A.21. *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $B \subset A$ é mensurável então $f \in \mathcal{L}(B)$.*

A.22. *Seja A um conjunto mensurável e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que:*

(a) *Se $f, g \in \mathcal{L}(A)$ e $f(x) \leq g(x)$ para $x \in A$ então*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu;$$

(b) *Se $a \leq f(x) \leq b$ para $x \in A$ e $\mu(A) < +\infty$ então $f \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$a\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq b\mu(A);$$

A.23. *Seja A um conjunto mensurável e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que se $f \geq 0$ e $\int_A f d\mu = 0$ então $f(x) = 0$ q.t.p.*

A.24. *Se $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é uma função tal que $\int_A f d\mu = 0$ para todo o $A \in \mathfrak{M}$, o que é que pode dizer sobre f ?*

A.25. *Mostre que o teorema A.27 pode ser generalizado a funções $f \in \mathcal{L}(A)$.*

A.26. *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ e $g(x) = f(x)$ q.t.p. em A , então $g \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$\int_A g d\mu = \int_A f d\mu.$$

A.27. *Mostre que se $f \in \mathcal{L}(A)$ então $|f| \in \mathcal{L}(A)$ e*

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu.$$

A.28. *Mostre que se f é mensurável em A e $|f| \leq g$ com $g \in \mathcal{L}(A)$ então $f \in \mathcal{L}(A)$.*

TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA

Uma das propriedades mais úteis do integral de Lebesgue é a possibilidade de, sob hipóteses bastante fracas, podermos trocar o sinal de integral e de limite:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k d\mu.$$

Nesta secção vamos estudar alguns resultados deste tipo.

Teorema A.29. (Teorema da Convergência Monótona de Levi) *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A tais que*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad (x \in A).$$

Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad (x \in A),$$

então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Como $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x)$ para $x \in A$, vemos que existe $l \in [0, +\infty]$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = l \quad \text{e} \quad l \leq \int_A f d\mu.$$

Falta pois mostrar que $l \geq \int_A f d\mu$.

Seja $0 < c < 1$ e $0 \leq s \leq f$ uma função simples mensurável. Defina-se

$$A_k = \{x \in A : f_k(x) \geq cs(x)\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Como $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f(x)$ em A , vemos que $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ e

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k,$$

Concluimos que, para todo o k ,

$$\int_A f_k d\mu \geq \int_{A_k} f_k d\mu \geq c \int_{A_k} s d\mu.$$

Tomando $k \rightarrow +\infty$, podemos aplicar o teorema A.6 (pois o integral é σ -aditivo), para concluir que

$$l \geq c \int_A s d\mu.$$

Sendo $0 < c < 1$ arbitrário, isto mostra que

$$l \geq \int_A s d\mu,$$

para toda a função simples $0 \leq s \leq f$. Logo $l \geq \int_A f d\mu$, como pretendido. \square

O exemplo seguinte mostra que os resultados de convergência obtidos não são válidos se substituirmos integral de Lebesgue por integral de Riemann.

Exemplo A.30. *Seja $\{q_1, q_2, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ uma enumeração dos racionais entre 0 e 1. Para cada $k = 1, 2, \dots$, defina-se $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \{q_1, \dots, q_k\}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$ é a função de Dirichelet. Concluímos do teorema da convergência monótona que

$$\int_{[0,1]} f d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} f_k d\mu = 0,$$

logo f é integrável à Lebesgue. É claro que este resultado podia ser obtido de forma mais rápida observando que a função de Dirichelet é uma função simples.

Corolário A.31. *Seja A um conjunto mensurável. Então $\mathcal{L}(A)$ é um espaço vetorial e o integral $\int : \mathcal{L}(A) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma transformação linear.*

Demonstração. é preciso mostrar que se $f, g \in \mathcal{L}(A)$, $c \in \mathbb{R}$, então $f + g, cf \in \mathcal{L}(A)$ e

$$\begin{aligned} \int_A (f + g) d\mu &= \int_A f d\mu + \int_A g d\mu, \\ \int_A c f d\mu &= c \int_A f d\mu. \end{aligned}$$

Limitamo-nos a demonstrar a primeira relação, deixando a segunda como exercício. Suponhamos primeiro que $f, g \geq 0$. Se f, g são simples, então

$$\int_A (s_1 + s_2) d\mu = I_A(s_1 + s_2) = I_A(s_1) + I_A(s_2) = \int_A s_1 d\mu + \int_A s_2 d\mu.$$

Senão, pelo teorema A.23, podemos escolher sucessões monótonas de funções simples $\{s'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{s''_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que convergem para f e g . Como

$$\int_A (s'_n + s''_n) d\mu = \int_A s'_n d\mu + \int_A s''_n d\mu,$$

passando ao limite, concluímos que

$$\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Para provar o caso geral consideram-se separadamente os conjuntos onde f e g têm sinal constante. \square

Para obter um resultado de convergência para sucessões não-monótonas de funções precisamos do

Lema A.32. (Lema de Fatou) *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções não-negativas, mensuráveis em A . Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf f_k(x) = f(x), \quad (x \in A),$$

então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_A f_k d\mu \geq \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Para cada $m = 1, 2, \dots$, defina-se

$$g_m(x) = \inf \{f_k(x) : k \geq m\}, \quad (x \in A).$$

Então g_m é mensurável em A e temos

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots \quad \text{com} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} g_m(x) = f(x).$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_A g_m d\mu = \int_A f d\mu.$$

Como $f_m(x) \geq g_m(x)$ para $x \in A$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_A f_k d\mu \geq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_A g_m d\mu = \int_A f d\mu.$$

□

Como mostra um exercício no final desta secção, a desigualdade do lema de Fatou pode ser estrita.

Teorema A.33. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A . Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad (x \in A),$$

e existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que

$$|f_k(x)| \leq g(x), \quad (x \in A),$$

então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Como f_k e f são mensuráveis e dominadas por uma função integrável, por um exercício da secção precedente, vemos que $f_k, f \in \mathcal{L}(A)$.

Como $f_k + g \geq 0$ o lema de Fatou mostra que

$$\int_A (f + g) d\mu \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_A (f_k + g) d\mu,$$

ou seja

$$\int_A f d\mu \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_A f_k d\mu.$$

Por outro lado, $g - f_k \geq 0$ logo, também pelo lema de Fatou,

$$\int_A (g - f) d\mu \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf \int_A (g - f_k) d\mu,$$

ou seja

$$-\int_A f d\mu \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf -\int_A f_k d\mu,$$

o que equivale a

$$\int_A f d\mu \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup \int_A f_k d\mu.$$

Assim, vemos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu$ existe e é igual a $\int_A f d\mu$. □

Corolário A.34. (Teorema da Convergência Limitada) *Se $\mu(A) < +\infty$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão limitada de funções mensuráveis em A e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad (x \in A),$$

então

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|f_k(x)| \leq M$ para $x \in A$. Como $\mu(A) < +\infty$, uma função constante em A é integrável, logo podemos aplicar o teorema da convergência dominada. □

Observe que no dois resultados anteriores a função limite é uma função integrável. Por outro lado, no Teorema da Convergência Monótona a função limite pode ter integral $+\infty$.

Exemplo A.35. As funções

$$f_k(x) = \frac{\cos^k(x)}{1+x^2}, \quad (x \in [0, \pi]),$$

formam uma sucessão limitada de funções mensuráveis e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = 0, \quad x \neq 0, \pi.$$

Pelo teorema da convergência limitada vemos que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{[0, \pi]} \frac{\cos^k(x)}{1+x^2} d\mu = \int_{[0, \pi]} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\cos^k(x)}{1+x^2} d\mu = 0.$$

Problemas

A.29. Seja $g(x) = 0$ para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $g(x) = 1$ para $\frac{1}{2} < x \leq 1$. Defina uma sucessão de funções $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} f_{2k}(x) &= g(x), \\ f_{2k+1}(x) &= g(1-x). \end{aligned}$$

Mostre que para esta sucessão a desigualdade do lema de Fatou é estrita.

A.30. Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções não-negativas, mensuráveis em A . Mostre que:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k d\mu.$$

A.31. Seja $A \in \mathfrak{M}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis em A . Mostre que se existe $g \in \mathcal{L}(A)$ tal que $\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k(x)| \leq g(x)$, então:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A f_k d\mu = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} f_k d\mu.$$

A.32. Se A é mensurável, dizemos que $f \in \mathcal{L}^2(A)$ se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável e

$$\int_A |f|^2 d\mu < +\infty.$$

Se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ então define-se a **norma em \mathcal{L}^2** por:

$$\|f\| = \left(\int_A |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}},$$

e o **produto interno em \mathcal{L}^2** por

$$\langle f, g \rangle = \int_A fg d\mu.$$

Mostre que:

- (a) Se $f \in \mathcal{L}^2(A)$ e $c \in \mathbb{R}$ então $\|cf\| = |c| \|f\|$;
- (b) Se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ então $fg \in \mathcal{L}(A)$ e é válida a **desigualdade de Schwarz**:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|;$$

- (c) Se $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$ então $f + g \in \mathcal{L}^2(A)$ e é válida a **desigualdade triangular**

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

O que é que pode dizer sobre f se $\|f\| = 0$?

RELAÇÃO COM O INTEGRAL DE RIEMANN

Vamos agora mostrar que o integral de Lebesgue é uma extensão do integral de Riemann, i.e., que se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável à Riemann então f é integrável à Lebesgue e os dois integrais coincidem. Assim, a teoria de Lebesgue é, de facto, uma extensão da noção de integral a uma classe muito mais ampla de funções.

Teorema A.36. *Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável à Riemann. Então f é integrável à Lebesgue e*

$$\int_A f d\mu = \int_A f dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Demonstração. Podemos assumir que $A \subset \mathbb{R}^n$ é um rectângulo limitado. Para $k = 1, 2, \dots$, existe uma partição P_k de A tal que

- (a) P_{k+1} é um refinamento de P_k ;
- (b) $\lim_{k \rightarrow +\infty} L(f, P_k) = \int_A f$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} U(f, P_k) = \overline{\int}_A f$;

Sejam U_k e L_k funções simples tais que para todo o rectângulo S de P_k temos

$$L_k(x) = m_S(f) \quad \text{e} \quad U_k(x) = M_S(f) \quad (x \in \text{int}S).$$

Então é claro que

$$L(f, P_k) = \int_A L_k d\mu, \quad U(f, P_k) = \int_A U_k d\mu,$$

e por (a) vemos que

$$L_1(x) \leq L_2(x) \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq U_2(x) \leq U_1(x) \quad (\text{q.t.p. em } A).$$

Assim, existem funções mensuráveis

$$L(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} L_k(x), \quad U(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} U_k(x), \quad (\text{q.t.p. em } A),$$

tais que

$$L(x) \leq f(x) \leq U(x), \quad (\text{q.t.p. em } A).$$

De (b) e pelo teorema da convergência monótona, concluímos que

$$\int_A L d\mu = \int_A f dx, \quad \int_A U d\mu = \overline{\int}_A f dx.$$

Se f é integrável à Riemann, estes dois integrais são iguais. Logo, temos $U - L \geq 0$ q.t.p. em A , e

$$\int_A (U - L) d\mu = 0.$$

Por um exercício da secção anterior, concluímos que $U = L$ q.t.p. em A . Assim, $f(x) = U(x) = L(x)$ q.t.p. em A , portanto f é integrável à Lebesgue e

$$\int_A f d\mu = \int_A f dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

□

A relação entre o integral de Lebesgue e de Riemann, que acabámos de mostrar, também é útil no cálculo de integrais de Lebesgue, pois muitas funções integráveis são limites de funções contínuas e para estas sabemos calcular o seu integral de Riemann. Ilustramos esta técnica nos exemplos seguintes.

Exemplo A.37. Seja $a > 0$ e consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^a}$ no intervalo $A =]0, 1[$. Para cada $k = 1, 2, \dots$, as funções

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^a} & \text{se } x \in [\frac{1}{k}, 1[, \\ 0 & \text{se } x \in]0, \frac{1}{k}[, \end{cases}$$

são limitadas e contínuas q.t.p., logo são integráveis à Riemann e

$$\int_{]0, 1[} f_k dx = \int_{\frac{1}{k}}^1 \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \frac{1}{a-1} (k^{a-1} - 1) & (a \neq 1), \\ \log k & (a = 1). \end{cases}$$

Assim, vemos que $\{f_k\}$ é uma sucessão monótona de funções integráveis à Lebesgue, não-negativas, tais que

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x).$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que

$$\int_{]0, 1[} \frac{1}{x^a} d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{]0, 1[} f_k dx = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{se } a < 1, \\ +\infty & \text{se } a \geq 1. \end{cases}$$

Por exemplo, vemos que $\frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}(]0, 1[)$ mas $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}^2(]0, 1[)$.

Exemplo A.38. Para cada $y > 0$ consideremos a função $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{-x} x^{y-1}.$$

Afirmamos que $f \in \mathcal{L}(]0, +\infty[)$.

De facto, para $x \in]0, 1[$ temos que

$$|f(x)| \leq x^{y-1}$$

e, pelo exemplo precedente, a função x^{y-1} é integrável se $y > 0$. Portanto, $f \in \mathcal{L}(]0, 1[)$.

Para $x \geq 1$ a função $\exp(-x/2)x^{y-1}$ é contínua e tende para zero quando $x \rightarrow \infty$. Logo existe $M > 0$ tal que

$$f(x) \leq M e^{-x/2} \quad (x \geq 1),$$

e basta verificar que $\exp(-x/2) \in \mathcal{L}([1, +\infty[)$. Defina-se $f_k : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) = \begin{cases} e^{-x/2} & \text{se } x \in [1, k], \\ 0 & \text{se } x \in]k, +\infty[, \end{cases}$$

Então f_k é integrável à Riemann em $[1, k]$ e

$$\int_{[1, +\infty[} f_k d\mu = \int_1^k e^{-x/2} dx = 2 \left(e^{-1/2} - e^{-1/k} \right).$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que $\exp(-x/2) \in \mathcal{L}([1, +\infty[)$ com

$$\int_{[1, +\infty[} e^{-x/2} d\mu = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Concluímos ainda que $f \in \mathcal{L}(]0, +\infty[)$.

A **função gama** é a função $\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(y) = \int_{]0, +\infty[} e^{-x} x^{y-1} d\mu_x.$$

Deixamos como exercício mostrar que $\Gamma(1) = 1$ e que esta função satisfaz a relação de recorrência

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y).$$

Em particular, conclui-se que sobre os inteiros esta função coincide com a função factorial:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Exemplo A.39. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$

Definimos funções integráveis $f_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_k(x, y) = \begin{cases} e^{-(x^2+y^2)} & \text{se } (x, y) \in B_k(0), \\ 0 & \text{se } (x, y) \notin B_k(0) \end{cases}$$

Então $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão monótona que converge pontualmente para f . Usando a fórmula de mudança de variáveis calculamos

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_k d\mu = \int_{B_k(0)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^k e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \pi (1 - e^{-k^2}).$$

Pelo teorema da convergência monótona, concluímos que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f_k d\mu = \pi.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\mu_x \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} d\mu_y \right),$$

obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\mu = \sqrt{\pi}.$$

Problemas

A.33. Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

- $\int_1^{+\infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 1 dt$;
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{t}{k}} dt$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/n)}{1+x^2} dx$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos^n x dx$;
- $\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^2} dx dy$ onde $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_B \frac{e^{\frac{x^2+y^2+z^2}{n}}}{x^2+y^2+z^2} dx dy dz$ onde $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

A.34. Seja $A \in \mathfrak{M}$ com $\mu(A) < +\infty$. Mostre que $\mathcal{L}^2(A) \subset \mathcal{L}(A)$ (ver o último exercício da secção anterior). O que é que pode dizer se $\mu(A) = +\infty$?

A.35. Mostre que a função Γ satisfaz:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(y+1) = y\Gamma(y).$$

SUGESTÃO: Aplique integração por partes ao integral

$$\int_{\frac{1}{k}}^k e^{-x} x^y dx.$$

A.36. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \int_0^{t^2} e^{tx^2} dx.$$

- Mostre que g é contínua;
- Mostre que g é diferenciável;
- Calcule $g'(0)$.

Bibliografia

- [1] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley, 1992
- [2] L. T. Magalhães, *Integrais Múltiplos*, 2ª Edição, Texto Editora, 1995.
- [3] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw Hill, 1976.
- [4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill, 1986.
- [5] A. Kolmogorov e S. Fomin, *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1982.
- [6] F. Riesz e B. Nagy, *Functional Analysis*, Dover, 1990.