Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 12/Dez/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE V – TEOREMAS DE CONVERGÊNCIA E REGRA DE LEIBNIZ

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/`

Exercício 1 [5.6-4 do Fleming (pág. 205)]
Mostre que $\int f(x,y)\,dx\,dy$ existe se f é limitada, contínua e $|f(x,y)| \le C(1+x^2+y^2)^{-\frac{p}{2}}$, $p>2$.

Solução: *Uma função contínua f é integrável se e só se o seu módulo $|f|$ é integrável. Se f é contínua, então $|f|$ é contínua. Para uma função contínua h (toma-se $h=|f|$), por comparação, se $h \le g$ e g é integrável, então h é integrável. Portanto, basta demonstrar que a função $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = C(1+x^2+y^2)^{-\frac{p}{2}}$, onde C é uma constante real e p é um real maior do que 2, é integrável. Como g é contínua, a questão resume-se a verificar se o integral sobre $\mathbb{R}^2$ da função positiva $(1+x^2+y^2)^{-\frac{p}{2}}$ é finito. Usando coordenadas polares,*

$$\begin{aligned}
\int (1+x^2+y^2)^{-\frac{p}{2}}\,dV &= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} (1+r^2)^{-\frac{p}{2}} r\,d\theta\,dr \\
&= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R (1+r^2)^{-\frac{p}{2}} 2\pi r\,dr \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left[(1+r^2)^{1-\frac{p}{2}} \frac{\pi}{1-\frac{p}{2}} \right]_{r=0}^{r=R} \\
&= \frac{\pi}{1-\frac{p}{2}} < +\infty \ ,
\end{aligned}$$

porque $\lim_{R\to+\infty}(1+R^2)^{1-\frac{p}{2}} = 0$ uma vez que $1-\frac{p}{2}<0$. □

Exercício 2 [5.11-5 do Fleming (pág. 236)]
Seja $f_\nu(x) = \nu$ se $x \in]0,\frac{1}{\nu}[$ e $f_\nu(x)=0$ caso contrário, para $\nu = 1,2,\ldots$. Mostre que $\lim_{\nu\to+\infty} f_\nu(x) = 0$ para todo o x, mas $\int f_\nu\,dx = 1$. Porque é que isto não contraria o teorema da convergência dominada de Lebesgue?

Solução: *Cada f_ν é uma função em escada, com $\int f_\nu\,dx = \nu\cdot\frac{1}{\nu} = 1$, $\forall\nu$. Para todo o x real tem-se $\lim_{\nu\to+\infty} f_\nu(x) = 0$ porque, quando $x \notin]0,1[$, $f_\nu(x)=0$, $\forall \nu$, e, quando $x\in]0,1[$, existe um inteiro N tal que $x>\frac{1}{N}$, pelo que $f_\nu(x)=0$ para qualquer $\nu\ge N$.*

Isto não contraria o teorema da convergência dominada, porque a sucessão $f_1, f_2, \ldots$ não é dominada por qualquer função integrável, uma vez que a menor função g tal que $|f_\nu| \le g$, $\forall\nu$, é a função em escada

$$g(x) = \begin{cases} n & \text{se } x\in[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\ , \quad n=1,2,\ldots \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cujo integral é $\int g dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$. □

Exercício 3 [5.12-1 do Fleming (pág. 239)]
Determine $\phi'(t)$ se $\phi(t)$ é:
(a) $\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\,dx$, $t \neq 0$;
(b) $\int_0^\pi \frac{1}{x} e^{xt} \sin x\,dx$.

Solução: *Para ambas as alíneas verificam-se as hipóteses do teorema que dá a derivada do integral como o integral da derivada, relativamente a um parâmetro (regra de Leibniz).*

(a) *Para* $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \ln(x^2+t^2)\,dx = \int_0^1 \frac{2t}{x^2+t^2}\,dx \\ &= \int_0^1 2\frac{\frac{1}{t}}{1+(\frac{x}{t})^2}\,dx = \left[2\arctan(\tfrac{x}{t})\right]_{x=0}^{x=1} = 2\arctan(\tfrac{1}{t}) \ .\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{x} e^{xt}\sin x\right)\,dx = \int_0^\pi e^{xt}\sin x\,dx \\ &= \left[\frac{e^{xt}(t\sin x - \cos x)}{1+t^2}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1+e^{\pi t}}{t^2+1} \ ,\end{aligned}$$

onde a primitiva de $e^{xt}\sin x$ *em ordem a* x *foi obtida primitivando por partes duas vezes.*

□

Exercício 4 [5.12-4 do Fleming (pág. 239)]
Mostre que

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$$

desde que f e $\frac{\partial f}{\partial t}$ sejam contínuas em $[a_0, b_0] \times B$ onde B é aberto, com $a_0 \leq a(t) \leq b_0$ e $a_0 \leq b(t) \leq b_0$ para todo o $t \in B$, e desde que as funções a e b sejam de classe C^1.

Solução: *Considere-se* $F(x,t) = \int_{a_0}^x f(s,t)\,ds$. *Então* $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ *pelo teorema fundamental do cálculo e* $\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{a_0}^x \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\,ds$ *pela regra de Leibniz. Como* $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = F(b(t),t) - F(a(t),t)$, *vai-se calcular a derivada desta diferença usando a regra da cadeia:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx &= \frac{d}{dt}\left(F(b(t),t) - F(a(t),t)\right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{f}(b(t),t)b'(t) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(b(t),t)}_{\int_{a_0}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\,ds} - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}}_{f}(a(t),t)a'(t) - \underbrace{\frac{\partial F}{\partial t}(a(t),t)}_{\int_{a_0}^{a(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t)\,ds} \\ &= f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \ .\end{aligned}$$

□