Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise
Última actualização: 24/Nov/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE IV – INTEGRAÇÃO EM VARIEDADES

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/`

Parametrizações

Exercício 1 [8.1-1 do Fleming (pág. 329)]
Para cada uma das seguintes funções de $V \subseteq \mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$, determine $\mathcal{J}g(s,t)$ e a imagem $g(V)$. Mostre que g é bijectiva.

(a) $g(s,t) = (s+t, s-3t, -2s+2t+2)$, $V = \{(s,t) : 0 < s+t < 1, s > 0, t > 0\}$.
(b) $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha\cos\theta, \rho\sin\alpha\sin\theta)$, com α fixo satisfazendo $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $V =]0,\infty[\times]0,2\pi[$.
(c) $g(s,t) = (st, s, t)$, $V = \mathbb{R}^2$.

Solução:

(a)

$$g'(s,t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}g(s,t) &= \left|\frac{\partial g}{\partial s} \wedge \frac{\partial g}{\partial t}\right| \\
&= |(e_1 + e_2 - 2e_3) \wedge (e_1 - 3e_2 + 2e_3)| \\
&= |(-3-1)e_{12} + (2+2)e_{13} + (2-6)e_{23}| \\
&= \sqrt{4^2+4^2+4^2} \;=\; 4\sqrt{3}\ .
\end{aligned}$$

V é o triângulo aberto em $\mathbb{R}^2$ de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ e g é uma transformação afim, logo $g(V)$ é o triângulo aberto em $\mathbb{R}^3$ de vértices $g(0,0) = (0,0,2)$, $g(1,0) = (1,1,0)$ e $g(0,1) = (1,-3,4)$.
$g(V)$ está sobre o plano com equação $x+y+z=2$. A bijectividade pode ser verificada (com o cálculo da inversa) resolvendo:

$$g(s,t) = (x, y, 2-x-y) \iff \left\{\begin{array}{l} s+t = x \\ s-3t = y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} s = \frac{3x+y}{4} \\ t = \frac{x-y}{4} \end{array}\right.$$

Conclui-se que $g : V \to g(V)$ é bijectiva com inversa $g^{-1}(x,y) = \left(\frac{3x+y}{4}, \frac{x-y}{4}\right)$.

(b)

$$g'(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \sin\alpha\cos\theta & -\rho\sin\alpha\sin\theta \\ \sin\alpha\sin\theta & \rho\sin\alpha\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}g(\rho,\theta) = \left|\frac{\partial g}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial g}{\partial \theta}\right| = \rho\sin\alpha\ .$$

$g(V)$ é o cone de equação $y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$, excepto a semi-recta $\{(x,y,0) : y \geq 0\}$.

(c)

$$g'(s,t) = \begin{bmatrix} t & s \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}g(s,t) = \left|\frac{\partial g}{\partial s} \wedge \frac{\partial g}{\partial t}\right| = \sqrt{1+s^2+t^2}\ .$$

$g(V)$ é hiperbolóide de equação $x = yz$.

□

Exercício 2 Seja $G : V \to X \cap \mathcal{U}$ uma parametrização local para a variedade r-dimensional X, onde $V \subseteq \mathbb{R}^r$ e $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos. Mostre que as colunas da jacobiana $G'(x)$ (com $x \in V$) formam uma base do espaço tangente a X em $G(x)$.

Solução: *O espaço tangente $T_{G(x)}X$ tem dimensão $r = \dim X$. A jacobiana $G'(x)$ tem r colunas, as quais são linearmente independentes pois $G'(x)$ tem característica máxima. Logo, basta mostrar que cada coluna de $G'(x)$ é um vector tangente a X em $G(x)$.*

Os vectores tangentes a X em $G(x)$ são os vectores da forma $c'(0)$ para alguma função $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to X$ continuamente diferenciável com $c(0) = G(x)$. Seja $\frac{\partial G}{\partial x^i}$ a i-ésima coluna de $G'(x)$. Tome-se a curva $c :]-\varepsilon,\varepsilon[\to X$, $c(t) = G(x + te_i)$. Pela regra da cadeia, $c'(0) = \frac{\partial G}{\partial x^i}$, o que mostra que a i-ésima coluna de $G'(x)$ ($i = 1,\ldots,r$) é um vector tangente a X em $G(x)$. □

Exercício 3 [8.1-2 do Fleming (pág. 329)]
Para cada uma das funções do Exercício 1, determine o espaço tangente à imagem $X = g(V)$ no ponto x_0 indicado, $T_{x_0}X$:

(a) Para a função da alínea (a), tome $x_0 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 2)$.
(b) Para a função da alínea (b), tome $x_0 = (\cos\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha)$.
(c) Para a função da alínea (c), tome $x_0 = (1,1,1)$.

Solução: *As colunas de $g'(s_0,t_0)$, onde (s_0,t_0) é tal que $g(s_0,t_0) = x_0$, formam uma base do espaço tangente a S em x_0, $T_{x_0}S$.*

(a) $x_0 = g(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$$g'(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $T_{x_0}S$ é formada por $e_1 + e_2 - 2e_3$ e $e_1 - 3e_2 + 2e_3$.

(b) $x_0 = g(1, \frac{\pi}{4})$

$$g'(1, \tfrac{\pi}{4}) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha & -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $T_{x_0}S$ é formada por $(\cos\alpha)e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha(e_2+e_3)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha(e_3 - e_2)$.

(c) $x_0 = g(1,1)$

$$g'(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $T_{x_0}S$ é formada por $e_1 + e_2$ e $e_1 + e_3$.

□

Exercício 4 [8.2-2 do Fleming (pág. 333)]
Seja $M = \{(y^2 + z^2, y, z) : y > 0\}$ e seja $F(x, y, z) = (y + z, e^z)$ para $(x, y, z) \in M$. Mostre que F é um sistema de coordenadas para M e determine $F(M)$

> **Sugestão:** Primeiro tome y e z como coordenadas em M e depois determine uma mudança de coordenadas φ apropriada que dê o sistema F.

Solução: *De acordo com a sugestão, seja $G : \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \to M$ definida por $G(y, z) = (y^2 + z^2, y, z)$. A função G é uma parametrização porque é bijectiva e continuamente diferenciável, a inversa G^{-1} dada por projecção nas duas últimas coordenadas é contínua, e a jacobiana $G'(y,z) = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem característica máxima, $\forall (y, z)$.*

Considere-se a mudança de coordenadas definida por $\phi(y, z) = (y + z, e^z)$. Então $F = \phi \circ G^{-1}$ porque $\phi(G^{-1}(x, y, z)) = \phi(y, z) = (y + z, e^z)$, $\forall (x, y, z) \in M$.

A função $F : M \to F(M)$ é um sistema de coordenadas porque F^{-1} é uma parametrização (composição de uma parametrização com uma mudança de coordenadas).

A imagem de F é $F(M) = \Phi\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{(y + z, e^z) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : e^s > t > 0\}$. □

Exercício 5 Seja $G : V \to X$ com $V \subseteq \mathbb{R}^2$ uma parametrização de uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Mostre que

$$\mathcal{J}G = \left| \frac{\partial G}{\partial x} \times \frac{\partial G}{\partial y} \right| = \sqrt{\det(DG)^t(DG)}\ .$$

Solução: *Sejam $u = \frac{\partial G}{\partial x}$ e $v = \frac{\partial G}{\partial y}$ as colunas da jacobiana $DG(x, y)$. Por definição $\mathcal{J}G(x, y)$ é a norma do produto exterior das colunas de $DG(x, y)$, que quando são duas colunas em $\mathbb{R}^3$ fica $\mathcal{J}G(x, y) = |u \times v|$. Por outro lado,*

$$\det(DG)^t(DG) = \det\left(\begin{bmatrix} - & u & - \\ - & v & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | \\ u & v \\ | & | \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} |u|^2 & u \cdot v \\ v \cdot u & |v|^2 \end{bmatrix} = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2\ .$$

O resultado segue da igualdade

$$|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 \sin^2\theta = |u|^2|v|^2 - |u|^2|v|^2\cos^2\theta = |u|^2|v|^2 - (u \cdot v)^2\ ,$$

onde θ é o ângulo entre os vectores u e v. □

Integrais de Linha de Campos Escalares

Exercício 6 A **espiral logarítmica** é a curva definida pela parametrização

$$g(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)\ , \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

Esta curva pode ser decomposta em troços de $t = 2n\pi$ até $t = 2(n+1)\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$. Qual é o rácio entre o **comprimento** de um destes segmentos e o comprimento do segmento anterior?

Solução: *O comprimento do troço Γ_n correspondente a $t \in [2n\pi, 2(n+1)\pi]$ ($n \in \mathbb{Z}$) é dado pelo integral de linha*

$$\textit{Comprimento}\,(\Gamma_n) = \int_{\Gamma_n} 1\, dV_1 = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} |g'(t)|\, dt\ .$$

Como $g'(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t)\big)$, temos $|g'(t)| = \sqrt{2}e^t$ e, então,

$$\begin{aligned}\textit{Comprimento}\,(\Gamma_n) &= \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sqrt{2}e^t\, dt \\ &= \sqrt{2}\left[e^t\right]_{t=2n\pi}^{t=2(n+1)\pi} \\ &= \sqrt{2}(e^{2(n+1)\pi} - e^{2n\pi}) \\ &= \sqrt{2}e^{2n\pi}\left(e^{2\pi} - 1\right)\ .\end{aligned}$$

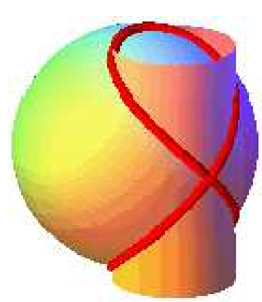
Assim, o rácio entre o comprimento de um destes segmentos e o segmento anterior é a constante

$$\frac{\textit{Comprimento}\,(\Gamma_n)}{\textit{Comprimento}(\Gamma_{n-1})} = \frac{\sqrt{2}e^{2n\pi}(e^{2\pi}-1)}{\sqrt{2}e^{2(n-1)\pi}(e^{2\pi}-1)} = e^{2\pi}\ .$$

□

Exercício 7 Considere o cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ e a esfera unitária $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Seja Γ a curva de intersecção destas duas superfícies, conhecida por **curva de Viviani**. Esboce a curva Γ e calcule a **massa** de um filamento com a forma de Γ, sabendo que a sua densidade de massa por unidade de comprimento é $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1+y}}$.

Solução: *A curva de intersecção das duas superfícies pode ser observada na figura seguinte:*



A massa do filamento metálico é dada pelo integral de linha

$$M = \int_\Gamma f \, dV_1 \ .$$

Para calcular este integral precisamos de determinar uma parametrização para a curva Γ. Seguidamente apresentam-se três resoluções alternativas usando diferentes parametrizações (ainda há outras possibilidades).

- **Resolução 1:** *A projecção da curva Γ no plano xy é simplesmente a circunferência de centro $(0, \frac{1}{2})$ e raio $\frac{1}{2}$ dada pelas equações: $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ e $z = 0$. Pensando em coordenadas cilíndricas relativamente ao eixo do cilindro, pode-se parametrizar a curva de projecção com um ângulo polar $\theta \in [0, 2\pi]$:*

$$(x(\theta), (y(\theta)) = \left(\frac{1}{2}\cos\theta, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\right) \ ,$$

e depois usar a expressão $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ para obter uma parametrização da metade de Γ no hemisfério norte:

$$g(\theta) = \left(\underbrace{\frac{1}{2}\cos\theta}_{x(\theta)}, \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta}_{y(\theta)}, \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta}}_{\sqrt{1 - x(\theta)^2 - y(\theta)^2}} \right) \ , \qquad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Para esta parametrização tem-se

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \left(-\tfrac{1}{2}\sin\theta, \tfrac{1}{2}\cos\theta, \frac{-\cos\theta}{4\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\theta}} \right) \\ |g'(\theta)| &= \sqrt{\tfrac{3+\sin\theta}{8}} \qquad \text{e} \\ f(g(\theta)) &= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{2}}} \ . \end{aligned}$$

Por simetria do filamento, a massa da porção no hemisfério norte é metade da massa total. A massa dessa porção é

$$\frac{M}{2} = \int_{\Gamma \cap \{z \geq 0\}} f \, dV_1 = \int_0^{2\pi} f(g(\theta))|g'(\theta)| \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{8}}}{\sqrt{\frac{3+\sin\theta}{2}}} \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta = \pi \ .$$

Logo a massa total é $M = 2\pi$.

- **Resolução 2:** *Utiliza-se agora coordenadas esféricas:*

$$\begin{cases} x = r\sin\phi\cos\theta \ , \\ y = r\sin\phi\sin\theta \ , \\ z = r\cos\phi \ . \end{cases}$$

Nestas coordenadas, a esfera é dada pela condição $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$, e a posição do cilindro impõe $\theta \leq \pi$. Como a curva é a intersecção da esfera com o cilindro, temos

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = y \end{cases} \implies y = 1 - z^2 \ ,$$

o que em coordenadas esféricas dá

$$\sin\phi\sin\theta = 1-\cos^2\phi = \sin^2\phi \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta = \sin\phi\ .$$

Consequentemente,

$$\begin{cases} x = \sin\theta\cos\theta\ , \\ y = \sin^2\theta\ , \\ z = \cos\phi\ . \end{cases}$$

Como $z^2 = 1-y$*, temos* $z^2 = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$*, pelo que* $z = \pm\cos\theta$*. Utilizando o facto de que* $-\cos\theta = \cos(\pi+\theta)$*, obtemos, então, a parametrização de toda a curva* Γ *em termos do ângulo* $\theta \in [0, 2\pi]$*:*

$$h(\theta) = \big(\sin\theta\cos\theta, \sin^2\theta, \cos\theta\big)\ .$$

Para esta parametrização tem-se

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= \big(\cos^2\theta - \sin^2\theta, 2\sin\theta\cos\theta, -\sin\theta\big) \\ &= (\cos 2\theta, \sin 2\theta, -\sin\theta)\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |h'(\theta)| &= \sqrt{1+\sin^2\theta} \qquad \text{e} \\ f(h(\theta)) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\ . \end{aligned}$$

A massa do filamento é dada por

$$M = \int_\Gamma f\, dV_1 = \int_0^{2\pi} f(h(\theta))|h'(\theta)|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}\sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi\ .$$

- **Resolução 3:** *Poderíamos ter obtido a mesma parametrização utilizando coordenadas cilíndricas,*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\ , \\ y = \rho\sin\theta\ , \\ z = z\ . \end{cases}$$

Como sobre Γ *se tem* $x^2+y^2 = y$*, fica* $\rho^2 = y = \rho\sin\theta$*, o que implica que* $\rho = \sin\theta$*. Então,* $z^2 = 1-y = 1-\sin^2\theta$ *e obtemos novamente a parametrização:*

$$h(\theta) = \big(\sin\theta\cos\theta, \sin\theta^2, \cos\theta\big)\ , \quad \theta\in[0,2\pi]\ .$$

□

Integrais de Linha de Campos Vectoriais

Exercício 8 Calcule o **trabalho** realizado pelo campo de forças

$$F(x,y,z) = (yz, xz, x(y+1))$$

no deslocamento de uma partícula uma vez ao longo do triângulo de vértices $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ e $(-1,1,-1)$ percorridos por esta ordem.

Solução: *Este campo não é fechado pois* $\frac{\partial F_3}{\partial x} = y+1 \neq y = \frac{\partial F_1}{\partial z}$*. Assim, é necessário calcular o trabalho pela definição de integral de linha. Seja* Γ_1 *o segmento de* $(0,0,0)$ *até* $(1,1,1)$*,* Γ_2 *o* *segmento de* $(1,1,1)$ *até* $(-1,1,-1)$ *e* Γ_3 *o segmento de* $(-1,1,-1)$ *até* $(0,0,0)$. *Escolhem-se as seguintes parametrizações lineares para cada um destes três troços regulares:*

$$\begin{array}{ll} g_1(t) = (0,0,0) + t\,((1,1,1) - (0,0,0)) = (t,t,t)\ , & t \in [0,1]\ , \\ g_2(t) = (1,1,1) + t\,((-1,1,-1) - (1,1,1)) = (1-2t, 1, 1-2t)\ , & t \in [0,1]\ , \\ g_3(t) = (-1,1,-1) + t\,((0,0,0) - (-1,1,-1)) = (t-1, 1-t, t-1)\ , & t \in [0,1]\ . \end{array}$$

As derivadas destes caminhos (ou velocidades destas trajectórias) são:

$$\begin{array}{l} g_1'(t) = (1,1,1)\ , \\ g_2'(t) = (-2,0,-2)\ , \\ g_3'(t) = (1,-1,1)\ . \end{array}$$

O trabalho total é a soma dos trabalhos ao longo de cada um dos três troços:

$$\begin{array}{rcl} W &=& \int_{\Gamma_1} F \cdot dg_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot dg_2 + \int_{\Gamma_3} F \cdot dg_3 \\ &=& \int_0^1 F(g_1(t)) \cdot g_1'(t)\,dt + \int_0^1 F(g_2(t)) \cdot g_2'(t)\,dt + \int_0^1 F(g_3(t)) \cdot g_3'(t)\,dt \\ &=& \int_0^1 \left(t^2 \cdot 1 + t^2 \cdot 1 + t(t+1) \cdot 1\right)\,dt \\ && + \int_0^1 \left((1-2t)\cdot(-2) + 2(1-2t)\cdot(-2)\right)\,dt \\ && + \int_0^1 \left((t-1)(1-t)\cdot 1 + (t-1)^2 \cdot (-1) + (t-1)(2-t)\cdot 1\right)\,dt \\ &=& \int_0^1 \left[\left(3t^2 + t\right) + (-6 + 12t) + \left(-3t^2 + 7t - 4\right)\right]\,dt \\ &=& \left[10t^2 - 10t\right]_{t=0}^{t=1} \;=\; 0\ . \end{array}$$

□

Exercício 9 Calcule o **integral de linha do campo vectorial** $F(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ ao longo da curva de intersecção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ com o plano $z=3y$, percorrida no sentido directo quando se observa bem acima do plano xy.

Solução: *O campo não é fechado (por exemplo,* $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$*), pelo que há que calcular o integral de linha pela definição. A projecção da curva no plano* xy *é uma elipse:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=3y \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2+(3y)^2=4 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2/5} = 1\ ,$$

a qual pode ser parametrizada por um ângulo. Usando que $z=3y$, *encontra-se a seguinte parametrização da curva:*

$$g(\theta) = (2\cos\theta, \sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta, 3\sqrt{\frac{2}{5}}\sin\theta)\ , \qquad \theta \in [0,2\pi]\ .$$

Então, como $\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta = 0$ *e* $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \pi$, *obtém-se:*

$$\oint_C F \cdot dg = \int_0^{2\pi} F(g(\theta)) \cdot g'(\theta)\,d\theta = \pi\left(4\sqrt{\frac{2}{5}} - 2\sqrt{\frac{2}{5}} + 6\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{\pi 8\sqrt{10}}{5}\ .$$

□

Exercício 10 Decida se os seguintes campos vectoriais são **gradientes**. Nos casos afirmativos, determine uma função potencial correspondente; nos casos negativos, determine uma curva fechada tal que $\oint_C F \neq 0$.

(a) $F(x,y) = (1,x)$;
(b) $F(x,y,z) = (2x + yz\cos(xyz), z + xz\cos(xyz), y + xy\cos(xyz))$;
(c) $F(x,y,z) = (1,x,z)$.

Solução:

(a) *O campo $F(x,y) = (1,x)$ não é fechado ($\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \neq 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$), logo não é gradiente. Por exemplo, o integral de F ao longo de uma circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida no sentido positivo é, pela definição,*

$$\int_0^{2\pi} (1 \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t)\ dt = \pi \neq 0\ .$$

(b) *O campo $F(x,y,z) = (2x+yz\cos(xyz), z+xz\cos(xyz), y+xy\cos(xyz))$ é fechado (pois verificam-se as três igualdades $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$) no seu domínio $\mathbb{R}^3$, o qual é um conjunto em forma de estrela, logo F é necessariamente um gradiente. De facto $F = \nabla\varphi$ onde $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é o campo escalar dado por*

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + \sin(xyz) + yz + k$$

para uma qualquer constante $k \in \mathbb{R}$.

(c) *O campo $F(x,y,z) = (1,x,z)$ não é fechado (porque $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 \neq 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$), logo não é gradiente. Com inspiração da alínea (a), verifica-se que, por exemplo, o integral de F ao longo de uma circunferência no plano xy de raio 1 centrada na origem e percorrida no sentido positivo (nesse plano) é, pela definição,*

$$\int_0^{2\pi} (1 \cdot (-\cos t) + \cos t \cdot \cos t + 0)\ dt = \pi \neq 0\ .$$

□

Exercício 11 Calcule

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

onde $P(x,y) = ye^x + 7 - y^2 + 2xy^3$, $Q(x,y) = e^x + \sin y + 3x^2y^2$ e C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$ percorrido no sentido directo.

Solução: *O campo vectorial (P,Q) em $\mathbb{R}^2$ é de classe C^1 e a curva C é seccionalmente regular, fechada e simples. Seja S a região quadrada limitada por C. Pelo* **teorema de Green**,

$$\int_C P\,dx + Q\,dy\ =\ \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy\ .$$

Ora,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + 6xy^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^x - 2y + 6xy^2\ ,$$

pelo que

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2y \ .$$

Assim o integral pedido é

$$\begin{aligned} \int_C P\,dx + Q\,dy &= \iint_S 2y\,dx\,dy \\ &= 2 \times (\textit{coordenada } y \textit{ do centróide de } S) \times (\textit{área de } S) \\ &= 2 \times \tfrac{1}{2} \times 1 \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

□

Exercício 12 Considere um **campo eléctrico** dado pela expressão

$$E(x,y,z) = (-y,x,e^z) + (x^2+y^2+z^2)^3\,(x,y,z) + \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}, 0\right) \ .$$

(a) Calcule o trabalho que a força eléctrica $F = qE$ realiza sobre uma partícula pontual de carga eléctrica $q = 3$ mergulhada neste campo e obrigada a percorrer um circuito com início na origem e composto pelas seguintes três curvas:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1 \ , \ z = 0\} \ , \\ C_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \ , \ 0 \le z \le 1\} \ \text{ e} \\ C_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1 \ , \ z = 1\} \ , \end{aligned}$$

sabendo que a partícula percorreu C_1 e C_3 no sentido directo do ponto de vista de um observador colocado no ponto $(0,0,10)$ e C_2 no sentido ascendente.

Sugestão: Tente entender a estrutura do campo vectorial E decompondo-o em campos mais simples e não fazer as contas todas directamente pela definição.

(b) Será o campo E um gradiente no seu domínio?

Solução:

(a) *Seguindo a sugestão, decompõe-se o campo vectorial E na forma $E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$ com*

$$\begin{aligned} E_1 &= (-y,x,0) \ , \\ E_2 &= (0,0,e^z) \ , \\ E_3 &= (x^2+y^2+z^2)^3\,(x,y,z) \qquad \textit{e} \\ E_4 &= \left(\tfrac{-y}{(x-1)^2+y^2}, \tfrac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}, 0\right) \ . \end{aligned}$$

O trabalho da força eléctrica será então

$$W = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \int_{C_i} qE_j = 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} \int_{C_i} E_j \ .$$

Vamos analisar o trabalho de cada um dos E_j's ao longo dos C_i's.

O campo E_1 não é fechado porque $\frac{\partial(E_1)_y}{\partial x} - \frac{\partial(E_1)_x}{\partial y} = 2 \neq 0$. Uma vez que as curvas fechadas C_1 e C_3 são horizontais assim como o campo E_1, para calcular $\oint_{C_1} E_1$ e $\oint_{C_3} E_1$ pode-se aplicar o **teorema de Green** *no plano, restringindo aos planos horizontais $z = 0$ e $z = 1$ e ignorando as componentes em z (que são nulas). Seja D_1 o disco no plano $z = 0$*

limitado por C_1. Temos, pelo teorema de Green, e uma vez que o domínio de E_1 é $\mathbb{R}^3$,

$$\oint_{C_1} E_1 = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial (E_1)_y}{\partial x} - \frac{\partial (E_1)_x}{\partial y} \right) dx\,dy = \iint_{D_1} 2\,dx\,dy = 2 \cdot \text{área}(D_1) = 2\pi \ .$$

Do mesmo modo obtemos $\oint_{C_3} E_1 = 2\pi$. A curva C_2 é vertical. A componente z do campo E_1 é nula. Logo, $\int_{C_2} E_1 = 0$.

O domínio do campo E_2 é $\mathbb{R}^3$, e este campo é fechado, portanto é um gradiente: $E_2 = \nabla\varphi$ para algum campo escalar φ. Escolhendo (a menos de constante aditiva) $\varphi(x, y, z) = e^z$, temos

$$\int_{C_2} E_2 = \varphi(0, 0, 1) - \varphi(0, 0, 0) = e - 1 \ .$$

Por outro lado, as curvas C_1 e C_3 são horizontais e E_2 é um campo vertical, pelo que $\oint_{C_1} E_2 = \oint_{C_3} E_2 = 0$.

O campo E_3 é radial pois é da forma $g(r)(x, y, z)$, com $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $g(r) = r^6$. Verifica-se as três igualdades das derivadas cruzadas para E_3, pelo que este campo é fechado. É também um campo de classe C^1 com domínio o conjunto em estrela $\mathbb{R}^3$. Logo, é um gradiente: existe um potencial ϕ tal que $E_3 = \nabla\phi$. O potencial ϕ é único a menos de uma constante aditiva e satisfaz $\frac{\partial\phi}{\partial x} = g(r)x$ e analogamente para as derivadas em y e em z. Observando que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, obtém-se $\frac{d\phi}{dr} = rg(r) = r^7$, donde se pode escolher $\phi(x, y, z) = \frac{r^8}{8}$.

O trabalho de E_3 ao longo de C_1 e de C_3 é zero pois o trabalho de campos gradientes ao longo de caminhos fechados é nulo. Quanto a C_2, aplicando o teorema fundamental do cálculo,

$$\int_{C_2} E_3 = \phi(0, 0, 1) - \phi(0, 0, 0) = \frac{1}{8} \ .$$

É fácil de verificar que E_4 é também um campo fechado. No entanto, o seu domínio é $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eixo } x = 1, y = 0\}$ que não é simplesmente conexo. A curva C_1 dá a volta ao eixo definido por $x = 1, y = 0$ pelo que não se pode garantir que $\oint_{C_1} E_4 = 0$. De facto, parametrizando C_1 com $h(\theta) = (1 + \cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtém-se

$$\begin{array}{rcl} \oint_{C_1} E_4 & = & \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, 1 + \cos\theta, 0) \cdot h'(\theta)\,d\theta \\ & = & \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, 1 + \cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0)\,d\theta \\ & = & 2\pi \neq 0 \ , \end{array}$$

onde se utilizou que $\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$. Conclui-se que E_4 não é um gradiente no seu domínio. Por outro lado, a curva fechada C_3 não dá a volta ao eixo dos $x = 1, y = 0$, ou seja, no domínio de E_4 ela é homotópica a um ponto. Uma vez que E_4 é um campo *fechado temos de imediato* $\oint_{C_3} E_4 = 0$. *A curva* C_2 *é vertical. A componente* z *do campo* E_4 *é nula. Logo,* $\int_{C_2} E_4 = 0$.

Resumindo, obteve-se os resultados da seguinte tabela:

$\int_{C_i} E_j$	E_1	E_2	E_3	E_4
C_1	2π	0	0	2π
C_2	0	$e-1$	$\frac{1}{8}$	0
C_3	2π	0	0	0

Somando todas as contribuições e multiplicando pela carga eléctrica $q = 3$ *obtemos o trabalho da força eléctrica*

$$W = 3\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\int_{C_i} E_j = 3\left(\frac{1}{8} + 2\pi + 2\pi + 2\pi + e - 1\right) .$$

Este trabalho é positivo, pelo que se pode concluir que a energia cinética da partícula aumenta durante o percurso.

(b) *Tem-se, por exemplo, que* $\oint_{C_1} E = \oint_{C_1}(E_1 + E_4) = 4\pi \neq 0$. *Logo, como* E *não é conservativo,* E *não é um gradiente.*

$\square$

Exercício 13 Seja R uma região em $\mathbb{R}^2$ com fronteira uma curva regular C. Seja $g(t) = (X(t), Y(t))$, $a \leq t \leq b$, uma parametrização de C. Demonstre a seguinte **fórmula para a área**:

$$\text{Área } (R) = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t)\end{bmatrix} dt .$$

Solução: *Com* $P(x,y) = -y$ e $Q(x,y) = x$, *tem-se*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1) = 2 .$$

Pelo **teorema de Green**, *obtém-se*

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy \;=\; \frac{1}{2}\iint_R 2\,dx\,dy \;=\; \iint_R 1\,dx\,dy \;=\; \text{Área } (R) .$$

Pela definição de integral de linha de um campo escalar,

$$\frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \big(-Y(t)X'(t) + X(t)Y'(t)\big)\,dt \;=\; \frac{1}{2}\int_a^b \det\begin{bmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t)\end{bmatrix} dt .$$

$\square$

Orientação

Exercício 14 [8.6-1 do Fleming (pág. 356)]
Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade de dimensão 1 determinada por uma função Φ de classe C^1 como nível zero: $M = \{(x,y) : \Phi(x,y) = 0, \operatorname{grad}\Phi(x,y) \neq 0\}$. Seja $v(x,y) = \frac{1}{|\operatorname{grad}\Phi(x,y)|}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$.

(a) Mostre que v é uma orientação para M.
(b) Mostre que, se M é conexa, as unicas orientações para M são v e $-v$.
(c) Determine todas as possíveis orientações de M quando $\Phi(x,y) = x^2 - y^2 - 1$.

Solução:

(a) *Uma vez que* $v(x,y) = \frac{1}{|\operatorname{grad}\Phi(x,y)|}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)$ *é contínua, basta mostrar que, em cada* $(x,y) \in M$, *o vector* $v(x,y)$ *é tangente a* M *no ponto* (x,y) *e tem norma 1.*
Os vectores tangentes a M *em* (x,y) *são os vectores ortogonais a* $\operatorname{grad}\Phi(x,y)$. *Como*

$$v(x,y)\cdot\operatorname{grad}\Phi(x,y) = \frac{1}{|\operatorname{grad}\Phi(x,y)|}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0 \ ,$$

tem-se que $v(x,y)$ *é tangente a* M *em* (x,y). *Como*

$$|v(x,y)| = \frac{\left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}, -\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\right|}{\left|\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\right|} = 1 \ ,$$

conclui-se que $v(x,y)$ *é uma orientação de* $T_{(x,y)}M$, $\forall (x,y) \in M$.

(b) *Seja* w *uma orientação de* M. *Em cada ponto* $(x,y) \in M$, $w(x,y) = \pm v(x,y)$. *Seja* $f : M \to \{1,-1\}$ *a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } w(x,y) = \ \ v(x,y) \\ -1 & \text{se } w(x,y) = -v(x,y) \ . \end{cases}$$

f *é uma função contínua em* M *que só toma os valores 1 e -1. Pelo teorema do valor intermédio,* f *tem que ser constante em cada componente conexa de* M. *Se* M *é conexa, então ou* $f(x,y) = 1\ \forall (x,y) \in M$ *i.e.* $w = v$, *ou* $f(x,y) = -1\ \forall (x,y) \in M$ *i.e.* $w = -v$.

(c) *A hipérbole* M *tem duas componentes conexas; seja* M_1 *a componente com* $x > 0$ *e seja* M_2 *a componente com* $x < 0$. *Em cada componente conexa, há duas orientações possíveis:* v_i *e* $-v_i$, *com* $i = 1,2$, *onde* v_i *é a orientação* v *da alínea (a) restrita à componente* M_i. *Logo,* M *tem quatro orientações possíveis:* v_1 *em* M_1 *e* v_2 *em* M_2, *ou* v_1 *em* M_1 *e* $-v_2$ *em* M_2, *ou* $-v_1$ *em* M_1 *e* v_2 *em* M_2, *ou* $-v_1$ *em* M_1 *e* $-v_2$ *em* M_2.

□

Exercício 15 [8.7-2 do Fleming (pág. 361)]
Seja $A = \{(x,y,z) : y = x^2 + z^2, y \leq 4\}$ orientada de maneira a que $o^{31}(x) > 0$. Calcule:
(a)
$$\int_{A^o} z\, dx \wedge dy \ .$$
(b)
$$\int_{A^o} e^y\, dz \wedge dx \ .$$
Sugestão: Use coordenadas polares no plano xz.

Solução: *Seguindo a sugestão, considera-se a parametrização* $G : \{(r,\theta) : 0 < r < 2, 0 < \theta < 2\pi\} \to A \setminus \{(x, x^2, 0) : x > 0\}$ *definida por* $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r^2, r\sin\theta)$, *a qual só não cobre um subconjunto de* A *com medida nula.*

$$G'(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2r & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

A orientação induzida por G,

$$\frac{\frac{\partial G}{\partial r} \wedge \frac{\partial G}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial G}{\partial r} \wedge \frac{\partial G}{\partial \theta}\right|} = \frac{2r^2\sin\theta e_{12} + re_{13} + 2r^2\cos\theta e_{23}}{\sqrt{4r^4 + r^2}} \ ,$$

é oposta à indicada onde $o^{13} < 0$. *Logo, a orientação indicada é*

$$o(G(r,\theta)) = \frac{-2r\sin\theta e_{12} - e_{13} - 2r\cos\theta e_{23}}{\sqrt{4r^2+1}} \ .$$

Por fim, $\mathcal{J}G(r,\theta) = r\sqrt{4r^2+1}$.

(a)
$$\int_{A^o} z\, dx \wedge dy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sin\theta \cdot \frac{-2r\sin\theta}{\sqrt{4r^2+1}} \cdot r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta = -2\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr = -8\pi \ .$$
(b)
$$\int_{A^o} e^y\, dz \wedge dx = \int_0^{2\pi}\int_0^2 e^{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4r^2+1}} \cdot r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_{r=0}^{r=2} = \pi(e^4 - 1) \ .$$

□

Exercício 16 [8.7-5 do Fleming (pág. 361)]
Seja $n = 4$ e $M = \{x : (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1\}$. Seja $g(s,t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t\}$, $0 \leq s, t \leq 2\pi$.
(a) Determine a orientação o induzida por g a partir da orientação positiva de $\mathbb{R}^2$.
(b) Calcule
$$\int_{M^o} (dx^3 \wedge dx^4 + x^1x^3 dx^2 \wedge dx^4) \ .$$

Solução:

(a)

$$g'(s,t)=\begin{bmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ 0 & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}$$

A orientação induzida por g é

$$\begin{aligned} o(g(s,t)) &= \frac{\frac{\partial g}{\partial s}\wedge\frac{\partial g}{\partial t}}{\left|\frac{\partial g}{\partial s}\wedge\frac{\partial g}{\partial t}\right|} \\ &= \frac{[(-\sin s)e_1+(\cos s)e_2]\wedge[(-\sin t)e_3+(\cos t)e_4]}{1} \\ &= \sin s\sin t\, e_{13}-\sin s\cos t\, e_{14}-\cos s\sin t\, e_{23}+\cos s\cos t\, e_{24}\ . \end{aligned}$$

(b) *Usando a parametrização g, obtém-se*

$$\begin{aligned} \int_{M^o}\left(dx^3\wedge dx^4+x^1x^3dx^2\wedge dx^4\right) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(1\cdot 0+\cos s\cos t\cdot\cos s\cos t)\,ds\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2 s\,ds\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt \\ &= \pi^2\ . \end{aligned}$$

□

Integrais de Superfície

Exercício 17 Calcule a **massa** do elipsóide E com equação $x^2+y^2+4z^2=1$ supondo que a densidade de massa por unidade de área é

$$f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+16z^2}}\ .$$

Solução: *A massa de E é*

$$M=\int_E f\,dV_2=\int_T f(g(t))\sqrt{\det(Dg(t)^tDg(t))}\,dt\ ,$$

onde $g:T\to E$ é uma parametrização.

1º *Parametrizar E.*
Usando coordenadas esféricas adaptadas ao elipsóide,

$$g:]0,2\pi[\times]0,\pi[\to E\ ,\quad g(\theta,\varphi)=(\cos\theta\,\sin\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\frac{1}{2}\cos\varphi)\ .$$

A função g é de classe C^1, injectiva e a sua matriz jacobiana tem sempre característica 2:

$$Dg(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ 0 & -\frac{1}{2}\sin\varphi \end{pmatrix}\ .$$

2º *Calcular* $\sqrt{\det(Dg(t)^t Dg(t))}$.
Sejam $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ *e* $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ *as colunas de* $Dg(\theta,\varphi)$. *Então*

$$\sqrt{\det(Dg(t)^t Dg(t))} = \left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right| = \sin\varphi \sqrt{\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi}\ .$$

3º *Calcular a massa.*
Juntando os ingredientes acima obtém-se

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}}}_{f(g(\theta,\varphi))} \underbrace{\sin\varphi\sqrt{\cos^2\varphi + \frac{1}{4}\sin^2\varphi}}_{\sqrt{\det(Dg(t)^t Dg(t))}}\, d\varphi\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta \\ &= 2\pi\ . \end{aligned}$$

□

Exercício 18 Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $z = xy$ com $1 < x < 2$ e $1 < y < 2$. Calcule o **momento de inércia** de S em relação ao eixo dos yy, supondo que a sua densidade de massa é

$$\sigma(x,y,z) = \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}\ .$$

Solução: *O quadrado da distância do ponto* (x,y,z) *ao eixo dos* yy *é* $d^2(x,y,z) = x^2+z^2$. *Por definição, o momento de inércia de* S *em relação ao eixo dos* yy *é dado por*

$$I_y = \int_S d^2\sigma\, dV_2 = \int_T d^2(g(t))\sigma(g(t))\sqrt{\det(Dg(t)^t Dg(t))}\, dt\ ,$$

onde $g: T \to S$ *é uma parametrização. Utilizando* x *e* y *como parâmetros, a superfície* S *é descrita pela parametrização*

$$g(x,y) = (x,y,xy)\ , \quad 1 < x,y < 2\ ,$$

cuja derivada é dada pela matriz jacobiana

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}\ .$$

Sejam $\frac{\partial g}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial g}{\partial y}$ *a primeia e a segunda colunas de* $Dg(x,y)$ *respectivamente. Então:*

$$\sqrt{\det(Dg(x,y)^t Dg(x,y))} = \left|\frac{\partial g}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial y}\right| = \sqrt{1+x^2+y^2}\ .$$

Portanto, o momento de inércia pedido é

$$\begin{aligned} I_y &= \int_1^2\int_1^2 \underbrace{x^2(1+y^2)}_{d^2(g(x,y))} \underbrace{\frac{1}{(1+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}}_{\sigma(g(x,y))} \underbrace{\sqrt{1+x^2+y^2}}_{\sqrt{\det(Dg(x,y)^t Dg(x,y))}}\, dx\, dy \\ &= \int_1^2\int_1^2 x^2\, dx\, dy = \tfrac{7}{3}\ . \end{aligned}$$

□

Exercício 19 [exame de Janeiro de 2001]
Considere a variedade
$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy \ , \ x^2+y^2<1\right\} \ .$$
(a) Calcule a **área** de X.
(b) Determine o(s) ponto(s) de X onde o plano tangente a X é horizontal.

Solução:

(a) *A variedade X tem parametrização global $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\} \to X$, $g(x,y) = (x,y,2xy)$. Como $g'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$, tem-se $\mathcal{J}g(x,y) = |(e_1+2ye_3) \wedge (e_2+2xe_3)| = |e_{12}+2xe_{13}-2ye_{23}| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$. Usando coordenadas polares e o teorema de Fubini, a área de X é*
$$V_2(X) = \int_X 1\,dV_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\; r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \ .$$

(b) *Em cada ponto $(x,y,z) \in X$, o espaço tangente de X é gerado pelos vectores $(1,0,2y)$ e $(0,1,2x)$ que são as colunas de $g'(x,y)$. Os pontos de X onde o plano tangente a X é horizontal têm que ter coordenadas tais que $2y=0$ e $2x=0$, logo o único ponto de X nestas condições é a origem $(0,0,0)$.*

$\square$

Exercício 20 [exame de Fevereiro de 2001]
Considere o conjunto $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y+x^2 \ , \ 0<x<1 \ , \ 0<y<1\}$.
(a) Mostre que X é uma variedade.
(b) Calcule a **massa** de X sendo a sua densidade de massa dada por $\rho(x,y,z) = x$.

Solução:

(a) *O conjunto X é o gráfico em $\mathbb{R}^3$ da função continuamente diferenciável $g :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = y+x^2$. Logo, X é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.*

(b) *Usa-se a parametrização de X dada por $h(x,y) = (x,y,y+x^2)$ cuja jacobiana é $h'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$. Pelo teorema de Fubini, a massa de X é*
$$\int_X \rho\,dV_2 = \int_0^1\int_0^1 x\sqrt{4x^2+2}\,dx\,dy = \left[\frac{1}{12}(4x^2+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3}-1) \ .$$

$\square$

Exercício 21 [8.3-3 do Fleming (pág. 340)]
Mostre que $(0,0,\frac{1}{2})$ é o **centróide** do hemisfério

$$x^2+y^2+z^2=1\ , \qquad z>0\ .$$

Sugestão: Use coordenadas esféricas em H.

Solução: *Em coordenadas esféricas,* $H=\{(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) : r=1, 0\le\theta<2\pi, 0\le\varphi<\frac{\pi}{2}\}$. *A área de* H *é*

$$\text{Área } (H)=\int_H 1\,dV_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\theta\,d\varphi=2\pi\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=2\pi\ .$$

(Confirmação: a área de uma superfície esférica de raio r *é* $4\pi r^2$*, logo a área de* H *é* $\frac{1}{2}4\pi=2\pi$*.)*

Por simetria, os chamados momentos de H *são* $M^x=\int_H x\,dV_2=0$ *e* $M^y=\int_H y\,dV_2=0$*, e*

$$M^z=\int_H z\,dV_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\theta\,d\varphi=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\varphi)\,d\varphi=\pi\left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=\pi\ .$$

Portanto, o centróide de H *é o ponto de coordenadas* $(0,0,\frac{\pi}{2\pi})$*, ou seja, é* $\frac{1}{2}e_3$. □

Exercício 22 [8.3-6 do Fleming (pág. 340)]
Seja γ um arco simples ou uma curva fechada simples no semi-plano $y>0$ do plano (xy). Um tal arco admite uma parametrização G definida em $]0,\ell[$, onde ℓ é o comprimento de γ, com $|G'(s)|=1$ para qualquer $s\in]0,\ell[$. Seja $g(s,t)=(G^1(s),G^2(s)\cos t,G^2(s)\sin t)$ e seja $M=g(]0,\ell[\times]0,2\pi[)$ – diz-se que M é uma **superfície de revolução**.

(a) Prove o segundo **teorema de Pappus**:
Área $(M)=2\pi\overline{y}\ell$ onde $\overline{y}$ é a segunda coordenada do centróide de γ.

(b) Determine a área de um toro de raio maior r_1 e raio menor r_2.

Solução:

(a) *A parametrização* g *tem*

$$g'(s,t)=\begin{bmatrix}\frac{dG^1}{ds} & 0\\ \frac{dG^2}{ds}\cos t & -G^2(s)\sin t\\ \frac{dG^2}{ds}\sin t & G^2(s)\cos t\end{bmatrix}$$

e $\mathcal{J}g(s,t)=G^2(s)$ *(usando que* $\left(\frac{dG^1}{ds}\right)^2+\left(\frac{dG^2}{ds}\right)^2=1$*). Então*

$$\text{Área } (M)=\int_M 1\,dV_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\ell}G^2(s)\,ds\,dt=2\pi\int_0^{\ell}G^2(s)\,ds=2\pi\overline{y}\ell\ .$$

(b) *A circunferência no plano* xy *de raio* r_2 *e centro* $(0,r_1)$ *tem comprimento* $2\pi r_2$*, parametrização*

$$G(s)=(r_2\sin\frac{s}{r_2},r_1+r_2\cos\frac{s}{r_2})\ ,\qquad 0\le s\le 2\pi r_2\qquad \textit{com}\qquad |G'(s)|=1\ ,$$

e segunda coordenada do centróide

$$\frac{\int_\gamma y\, dV_1}{2\pi r_2} = \frac{\int_0^{2\pi r_2}\left(r_1 + r_2\cos\frac{s}{r_2}\right)\, ds}{2\pi r_2} = r_1 \ .$$

O toro é a superfície de revolução correspondente a esta circunferência. Pelo teorema de Pappus, a área do toro é $4\pi^2 r_1 r_2$ (ou seja, é o produto dos comprimentos das circunferências de raios r_1 e r_2).

$\square$

Fluxo

Exercício 23 Calcule o **fluxo** do campo vectorial $F(x,y,z) = (x, -2x+y, z)$ através do hemisfério norte da esfera de raio 1 centrada na origem segundo uma orientação à sua escolha.

Solução: *Seja S o hemisfério norte da esfera de raio 1 centrada na origem e seja ν a normal unitária que aponta para cima (i.e., com terceira componente positiva). O fluxo segundo o sentido desta normal (i.e., o fluxo para fora da esfera) é*

$$\iint_S F\cdot\nu = \iint_T F(g(t))\cdot\left(\pm\frac{\partial g}{\partial\theta}\times\frac{\partial g}{\partial\varphi}g\right)\, dt$$

onde $g: T\to S$ é uma parametrização. Recorrendo a coordenadas esféricas, escolhe-se

$$g:]0,2\pi[\times]0,\frac{\pi}{2}[\to S\ ,\ g(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)\ .$$

Para esta parametrização tem-se o seguinte produto das derivadas parciais em ordem a θ e a φ,

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial g}{\partial\theta}\times\tfrac{\partial g}{\partial\varphi} &= \det\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0\\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\end{bmatrix}\\ &= (-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)\ ,\end{aligned}$$

o qual aponta no sentido oposto ao inicialmente escolhido (pois a terceira componente $-\sin\varphi\cos\varphi$ é negativa quando $\varphi\in]0,\frac{\pi}{2}[$). Portanto o fluxo pretendido é

$$\begin{aligned}\iint_S F\cdot\nu &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{(\cos\theta\sin\varphi, -2\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)}_{F(g(\theta,\varphi))}\\ &\quad\cdot\underbrace{(\cos\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\sin^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi)}_{-\frac{\partial g}{\partial\theta}\times\frac{\partial g}{\partial\varphi}}\, d\varphi\, d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin\varphi - 2\sin\theta\cos\theta\sin^3\varphi\right)\, d\varphi\, d\theta\\ &= 2\pi\ .\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 24 Considere a pirâmide P em $\mathbb{R}^3$ limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$, e considere o campo vectorial

$$G(x,y,z) = \left(3, (z^3+x^2)y, -x^2z - \frac{1}{4}z^4\right) .$$

Calcule o **fluxo** de G através da face de P contida no plano $x+y+z=1$, no sentido da normal exterior.

Sugestão: Teorema da divergência.

Solução: *Aplicando o* **teorema da divergência** *a toda a pirâmide P e ao campo G, obtém-se*

$$\iint_{\partial P} G\cdot\nu = \iiint_P \underbrace{\mathrm{div}\,\mathrm{G}}_{0} = 0 ,$$

onde ν é a normal unitária exterior a P. Ora o bordo da pirâmide, ∂P, é constituído pelos quatro seguintes triângulos

$$\begin{array}{rcl} F &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\,,\ x,y,z\geq 0\} \\ F_z &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0\,,\ 0\leq x\leq 1\,,\ 0\leq x+y\leq 1\} \\ F_y &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\,,\ 0\leq z\leq 1\,,\ 0\leq x+z\leq 1\} \\ F_x &=& \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=0\,,\ 0\leq y\leq 1\,,\ 0\leq y+z\leq 1\} . \end{array}$$

Logo, a fórmula do teorema da divergência permite escrever que

$$\iint_{\partial F} G\cdot\nu = -\iint_{\partial F_z} G\cdot\nu - \iint_{\partial F_y} G\cdot\nu - \iint_{\partial F_x} G\cdot\nu .$$

Como

$$\nu|_{F_z} = (0,0,-1)\ ,\nu|_{F_y} = (0,-1,0)\ ,\ \text{e}\ \nu|_{F_x} = (-1,0,0)\ ,$$

tem-se

$$(G\cdot\nu)|_{F_z} = (-x^2z - \frac{1}{4}z^4)|_{z=0} = 0\ ,(G\cdot\nu)|_{F_y} = ((z^3+x^2)y)|_{y=0} = 0\ ,(G\cdot\nu)|_{F_x} = -3\ ,$$

pelo que o fluxo pedido é

$$\iint_{\partial F} G\cdot\nu = -\iint_{\partial F_x}(-3) = 3\cdot\ \textit{Área}\,(F_x) = \frac{3}{2} .$$

□

Outros Integrais em Variedades

Exercício 25 [exame de Janeiro de 2001]
Seja

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z\ ,y>0\ ,0<z<1\} .$$

(a) Calcule a orientação de A com componente o^{12} positiva.
(b) Calcule $\int_{A^o} e^z\, dx\wedge dy$ onde o é a orientação da alínea (a).

Solução:

(a) *Considere-se a parametrização de A dada por coordenadas polares no plano yz, $g :]0,1[\times]0,\pi[\to A$, $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$. A orientação em A induzida por g,*

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial r}\wedge\frac{\partial g}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial g}{\partial r}\wedge\frac{\partial g}{\partial\theta}\right|} = \frac{r\,e_{12} + 2r^2\sin\theta\,e_{13} - 2r^2\cos\theta\,e_{23}}{\sqrt{r^2+4r^4}} \ ,$$

tem componente em e_{12} positiva, pelo que esta é a orientação o pedida.

(b)

$$\int_{A^o} e^z\,dx\wedge dy = \int_0^\pi\int_0^1 e^{r^2} r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1) \ .$$

□

Exercício 26 [exame de Fevereiro de 2001]
Seja A o triângulo em $\mathbb{R}^3$ com vértices nos pontos $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ e $(0,0,-1)$.

(a) Mostre que $o = \frac{1}{3}(2e_{12} + e_{13} - 2e_{23})$ é uma orientação do plano contendo A.
(b) Calcule $\int_{A^o} x\,dy\wedge dz$ onde o é a orientação da alínea (a).

Solução:

(a) *O plano contendo A é gerado, por exemplo, pelos vectores $v_1 = (1,0,0)-(0,0,-1) = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,2,0)-(0,0,-1) = (0,2,1)$. Uma orientação do plano contendo A é pois*

$$\frac{v_1\wedge v_2}{|v_1\wedge v_2|} = \frac{2e_{12}+e_{13}-2e_{23}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2e_{12}+e_{13}-2e_{23})$$

que coincide com o.

(b) *A projecção de A no plano xy é o triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,2)$ e $(0,0)$ e A está contido no plano de equação $2x+y-2z=2$. A parametrização de A em termos das coordenadas x e y, $g(x,y) = (x,y,x+\frac{y}{2}-1)$, tem $|\frac{\partial g}{\partial x}\wedge\frac{\partial g}{\partial y}| = |v_1\wedge\frac{1}{2}v_2| = \frac{3}{2}$ onde v_1 e v_2 são como na alínea (a). Portanto,*

$$\int_{A^o} x\,dy\wedge dz = \int_0^1\int_0^{2-2x} x\cdot\frac{-2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 x(2x-2)\,dx = -\frac{1}{3} \ .$$

□

Teorema de Stokes

Exercício 27 Considere um filtro de ar cuja forma é aproximadamente a do conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\} ,$$

imerso numa **corrente de ar** cujo campo de velocidades é dado por

$$H(x, y, z) = (2yze^{y^2}, 2xze^{x^2}, -2 + xy) .$$

(a) Mostre que a quantidade de ar no interior do filtro se mantém constante, supondo que a densidade do ar é constante igual a 1.
(b) Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo de ar que sai através da parede curva do filtro.

Solução:

(a) *Pelo* **teorema da divergência**, *o fluxo total de ar através das paredes do filtro de dentro para fora é*

$$\int_{\partial D} H \cdot \nu = \int_D \operatorname{div} \mathrm{H} ,$$

onde ν é a normal exterior à fronteira ∂D. Como o campo H tem divergência nula ($\operatorname{div} \mathrm{H} = 0$), o fluxo é zero, pelo que a taxa de ar que entra no filtro é igual à taxa de ar que sai do filtro.

(b) *Seja S a parede curva de D. Para usar o* **teorema de Stokes**, *deve-se exibir o campo H como o rotacional de um outro campo $F = (F_1, F_2, F_3)$, chamado um potencial vector de H. Deve-se então encontrar uma solução do sistema de equações*

$$\begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 2yze^{y^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 2xze^{x^2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -2 + xy \ . \end{cases}$$

Este sistema tem múltiplas soluções e certamente tem uma solução com uma das componentes nula (pois o sistema define F a menos de um gradiente). Procurando apenas entre as soluções que têm componente $F_1 = 0$, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} &= 2yze^{y^2} \\ \quad\; - \frac{\partial F_3}{\partial x} &= 2xze^{x^2} \quad \Longrightarrow \quad F_3 \;=\; -ze^{x^2} + C_3(y, z) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= -2 + xy \quad \Longrightarrow \quad F_2 \;=\; -2x + \frac{1}{2}x^2 y + C_2(y, z) \ . \end{cases}$$

A primeira equação fica

$$\frac{\partial C_3}{\partial y} - \frac{\partial C_2}{\partial z} = 2yze^{y^2} ,$$

a qual tem, por exemplo, a solução

$$C_2 = 0 \quad \text{e} \quad C_3 = ze^{y^2} .$$

Encontra-se assim a solução particular

$$F(x, y, z) = \left(0, -2x + \frac{1}{2}x^2 y, ze^{y^2} - ze^{x^2}\right) .$$

Pelo teorema de Stokes, o fluxo de ar que sai através da parede curva do filtro é

$$\int_S H \cdot \nu = \int_S (\mathrm{rot}\,\mathrm{F}) \cdot \nu = \int_{\partial \mathrm{S}} \mathrm{F} \cdot \mathrm{dg} \ ,$$

onde ν é novamente a normal a S que aponta para fora de D e onde g é uma parametrização da curva ∂S no sentido compatível com ν. Como parametrização da curva

$$\partial S = \{(x, y, 4) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

no sentido induzido por ν toma-se

$$g(t) = (2\sin t, 2\cos t, 4) \ , \quad t \in]0, 2\pi[\ ,$$

cuja derivada é

$$g'(t) = (2\cos t, -2\sin t, 0) \ .$$

Assim, o fluxo é

$$\begin{aligned} \textstyle\int_S H \cdot \nu &= \textstyle\int_{\partial S} F = \int_0^{2\pi} F(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \left(8\sin^2 t - 8\cos t \sin^3 t\right) dt \\ &= 8\pi \ . \end{aligned}$$

Conclui-se que a quantidade de ar que sai através da parede curva do filtro é 8π.

□

Exercício 28 [exame de Janeiro de 2001]
Considere o cilindro $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\}$ e o seu subconjunto $A = \{(x, y, z) \in X : -2 < x < 2\}$. Seja o uma orientação de X à sua escolha.

(a) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} d\omega$, onde $\omega = y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

(b) Considere as circunferências $C_1 = \{(-2, y, z) \in X\}$ e $C_2 = \{(2, y, z) \in X\}$ com orientações o_1 e o_2 induzidas por o. Seja α uma forma-1 fechada em X. Relacione $\int_{C_1^{o_1}} \alpha$ com $\int_{C_2^{o_2}} \alpha$.

Solução:

(a) *Escolhendo parametrizações em termos de um parâmetro angular $\theta \in]0, 2\pi[$ para cada uma das circunferências que formam ∂A, tem-se*

$$\begin{aligned} g_1(\theta) &= (-2, \cos\theta, \sin\theta) & \textit{e} \quad g_2(\theta) &= (2, \sin\theta, \cos\theta) \\ g_1'(\theta) &= (0, -\sin\theta, \cos\theta) & g_2'(\theta) &= (0, \cos\theta, -\sin\theta) \ . \end{aligned}$$

(Uma orientação em A determina a orientação em cada uma das componentes de ∂A, daí esta escolha das parametrizações.) Pelo teorema de Stokes, o integral pedido é

$$\int_{A^o} d\omega = \int_{\partial A^o} \omega = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - 2\cos\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta - 2\sin\theta)\, d\theta = 0 \ .$$

(b) *Já que $\partial A^o = C_1^{o_1} \cup C_2^{o_2}$, usando o teorema de Stokes e o facto de α ser fechada, obtém-se*

$$\int_{C_1^{o_1}} \alpha + \int_{C_2^{o_2}} \alpha = \int_{\partial A^o} \alpha = \int_{A^o} d\alpha = 0 \ ,$$

pelo que os integrais indicados são simétricos: $\int_{C_1^{o_1}} \alpha = -\int_{C_2^{o_2}} \alpha$.

□

Exercício 29 [exame de Fevereiro de 2001]
Seja A a porção do hiperbolóide $x^2 = y^2 + z^2 + 1$ na faixa $1 \leq x < \sqrt{2}$.

(a) Escreva uma parametrização de ∂A em termos de uma coordenada angular e descreva a orientação o de A induzida pela parametrização de ∂A escolhida.
(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} z\, dy \wedge dz$ onde o é a orientação que escolheu na alínea (a).

Solução:

(a) *A fronteira de A é a circunferência dada pelas equações $x = \sqrt{2}$ e $y^2 + z^2 = 1$. Uma parametrização de ∂A em termos de uma coordenada angular é, por exemplo, $g(\theta) = (\sqrt{2}, \cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. A orientação em ∂A induzida por g corresponde à orientação de A induzida pela normal unitária ν que aponta para dentro da concavidade do hiperbolóide (em particular, $\nu(1,0,0) = (1,0,0)$).*
(b) *A forma integranda é $z\, dy \wedge dz = d(yz\, dz)$. Pelo teorema de Stokes*

$$\int_{A^o} d(yz\, dz) = \int_{\partial A^o} yz\, dz = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{2\pi} = 0 \ .$$

□

Exercício 30 [exame de Fevereiro de 2001]
Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular. Exprima o volume de A como um integral de uma forma-$(n-1)$ sobre a fronteira de A.

Solução: *O volume de A é $V_n(A) = \int_A 1\, dV_n$ e pode ser escrito em termos de uma forma-n como $\int_{A^{o^+}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ onde o^+ é a orientação standard em $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d(x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n)$, pelo teorema de Stokes tem-se*

$$V_n(A) = \int_{A^{o^+}} d(x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int_{\partial A^{o^+}} x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \ .$$

□

Exercício 31 [8.4-1 do Fleming (pág. 349)]
Para $n = 2$ e $\zeta = y\, dx - x\, dy$, verifique a fórmula do teorema da divergência em $\mathbb{R}^2$ (ou teorema de Green) calculando separadamente os integrais de ambos os membros quando o domínio bidimensional é:

(a) $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\}$;
(b) D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

Solução:

(a) *A normal exterior em ∂D é*

$$\nu(x,y) = \frac{xe_1 + ye_2}{|a|} \ .$$

Os cálculos que confirmam a fórmula são:

$$\zeta(x,y)\cdot\nu(x,y)=0 \implies \int_{\partial D}\zeta\cdot\nu\, dV_1=0$$

$$\operatorname{div}\zeta(x,y)=\tfrac{\partial y}{\partial x}-\tfrac{\partial x}{\partial y}=0-0=0 \implies \int_D \operatorname{div}\zeta\, dV_2=0\ .$$

(b) *A normal exterior em ∂D é*

$$\nu(x,y)=\begin{cases}-e_2 & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } 0 \textit{ a } e_1\ ,\\ e_1 & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } e_1 \textit{ a } e_1+e_2 \textit{ e}\\ \frac{e_2-e_1}{\sqrt{2}} & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } e_1+e_2 \textit{ a } 0\ .\end{cases}$$

Os cálculos que confirmam a fórmula são:

$$\zeta(x,y)\cdot\nu(x,y)=\begin{cases}x & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } 0 \textit{ a } e_1\ ,\\ y & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } e_1 \textit{ a } e_1+e_2 \textit{ e}\\ \frac{-x-y}{\sqrt{2}} & \textit{para } (x,y) \textit{ sobre o lado de } e_1+e_2 \textit{ a } 0\end{cases}$$

$$\implies \int_{\partial D}\zeta\cdot\nu\, dV_1=\int_0^1 x\, dx+\int_0^1 y\, dy+\int_0^1\left(\frac{-t-t}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\, dt=0$$

$$\operatorname{div}\zeta(x,y)=\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}=0-0=0 \implies \int_D \operatorname{div}\zeta\, dV_2=0\ .$$

□

Exercício 32 [8.4-2 do Fleming (pág. 349)]
Seja D o cone sólido em $\mathbb{R}^3$ com vértice $(0,0,1)$ e base $B=\{(x,y,0): x^2+y^2<1\}$. Seja $\zeta=x^2\, dx+y^2\, dz$. Calcule:

(a) $\int_B \zeta\cdot\nu\, dV_2$.

(b) $\int_A \zeta\cdot\nu\, dV_2$ onde $A=\partial D\setminus B$. Utilize o teorema da divergência.

Solução:

(a) *Sobre B, a normal exterior é $\nu(x,y,z)=-e_3$, pelo que $\zeta(x,y,z)\cdot\nu(x,y,z)=-y^2$ e, usando a parametrização $g(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, $0\le r\le 1$, $0\le\theta<2\pi$, para B com $\mathcal{J}g(r,\theta)=r$, vem*

$$\int_B \zeta\cdot\nu\, dV_2=\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2\sin^2\theta\cdot r\, dr\, d\theta=-\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, dr\cdot\int_0^1 r^3\, dr=-\frac{\pi}{4}\ .$$

(b) *Pelo teorema da divergência,*

$$\int_A \zeta\cdot\nu\, dV_2=\int_D \operatorname{div}\zeta\, dV_3-\int_B \zeta\cdot\nu\, dV_2=\int_D 2x\, dV_3+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\ ,$$

onde o integral sobre D de $2x$ é zero por simetria.

□