Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 25/Out/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE III – FORMAS DIFERENCIAIS

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/`

Sobre Álgebra Exterior

Exercício 1 [7.1-5 do Fleming (pág. 282)]
Sejam a, b e c covectores-1. Mostre que:
(a) $(a+b)\wedge c = a\wedge c + b\wedge c$.
(b) $(ka)\wedge b = k(a\wedge b)$, se k é um número real.
(c) $b\wedge a = -a\wedge b$.
(d) $a\wedge a = 0$.
(e) $(a+b)\wedge(a-b) = -2a\wedge b$.

Solução: *Sejam $a=\sum a_i e^i$, $b=\sum b_i e^i$ e $c=\sum c_j e^j$, onde $e^1,\dots,e^n$ é a base de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual da base standard de $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, para demonstrar a fórmula da alínea (a), calculam-se:*

$$\begin{aligned}(a+b)\wedge c &= \left(\sum(a_i+b_i)e^i\right)\wedge\sum c_j e^j\\ &= \sum\left((a_i+b_i)c_j\right)e^{ij}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}a\wedge c+b\wedge c &= \left(\sum a_i e^i\right)\wedge\sum c_j e^j+\left(\sum b_i e^i\right)\wedge\sum c_j e^j\\ &= \sum a_i c_j e^{ij}+\sum b_i c_j e^{ij}\\ &= \sum\left((a_i+b_i)c_j\right)e^{ij}\ ,\end{aligned}$$

onde $e^{ij}=e^i\wedge e^j$, e verifica-se que as duas expressões coincidem. □

Exercício 2 [7.5-2 do Fleming (pág. 305)]
Avalie os seguintes produtos (para $n=4$):
(a) $(e^1+e^2)\cdot(e_1+e_2)$,
(b) $e^{12}\cdot e_{34}$,
(c) $e^{134}\cdot(e_{431}+3e_{124})$,
(d) $(e^1-e^4)\wedge(e^2+e^4)\cdot(e^1+2e^4)\wedge(e^2-2e^4)$,
onde $e_{ij}=e_i\wedge e_j$ e $e_{ijk}=e_i\wedge e_j\wedge e_k$ são *vectores-2* e *vectores-3* definidos analogamente aos covectores-2 e covectores-3.

Solução:

(a)

$$(e^1+e^2)\cdot(e_1+e_2)=\underbrace{e^1\cdot e_1}_{1}+\underbrace{e^1\cdot e_2}_{0}+\underbrace{e^2\cdot e_1}_{0}+\underbrace{e^2\cdot e_2}_{1}=2\ .$$

(b)
$$e^{12} \cdot e_{34} = 0 \ .$$

(c)
$$e^{134} \cdot (e_{431} + 3e_{124}) = \underbrace{e^{134} \cdot e_{431}}_{-1} + 3\underbrace{e^{134} \cdot e_{124}}_{0} = -1$$

(d)
$$\begin{aligned} & (e^1 - e^4) \wedge (e^2 + e^4) \cdot (e^1 + 2e^4) \wedge (e^2 - 2e^4) \\ = \ & (e^{12} + e^{14} + e^{24}) \cdot (e^{12} - 2e^{14} - 2e^{24}) \\ = \ & 1 - 2 - 2 \ = -3 \ . \end{aligned}$$

□

<u>Sobre Formas Diferenciais e Derivada Exterior</u>

Exercício 3 [7.4-2 do Fleming (pág. 295)]
Sejam P, Q e R funções com domínio $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Mostre que
$$d(P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy) \ = \ \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

Solução: *Para cada uma das três parcelas obtém-se*
$$\begin{aligned} d(P\,dy \wedge dz) &= \tfrac{\partial P}{\partial x}\, dx \wedge dy \wedge dz \ , \\ d(Q\,dz \wedge dx) &= \tfrac{\partial Q}{\partial y}\, dy \wedge dz \wedge dx \ = \ \tfrac{\partial Q}{\partial y}\, dx \wedge dy \wedge dz \ , \\ d(R\,dx \wedge dy) &= \tfrac{\partial R}{\partial z}\, dz \wedge dx \wedge dy \ = \ \tfrac{\partial R}{\partial z}\, dx \wedge dy \wedge dz \ . \end{aligned}$$
Portanto,
$$d(P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy) \ = \ \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \ .$$

□

Exercício 4 [7.4-4 do Fleming (pág. 295)]

(a) Mostre que se ω e ζ são formas diferenciais fechadas, então $\omega \wedge \zeta$ é fechada.
(b) Mostre que se ω é fechada e ζ é exacta, então $\omega \wedge \zeta$ é exacta.

Solução: *Seja r o grau da forma ω.*

(a) *Mostra-se que $d(\omega \wedge \zeta) = 0$:*
$$d(\omega \wedge \zeta) = \underbrace{(d\omega)}_{0} \wedge \zeta + (-1)^r \omega \wedge \underbrace{d\zeta}_{0} = 0 \ .$$

(b) *Se ζ é exacta, então existe uma forma α tal que $\zeta = d\alpha$, pelo que*
$$\omega \wedge \zeta = \omega \wedge d\alpha = (-1)^r \underbrace{(d\omega)}_{0} \wedge \alpha + \omega \wedge d\alpha = d\left((-1)^r \omega \wedge \alpha\right) \ .$$

Definindo $\beta = (-1)^r \omega \wedge \alpha$, *tem-se que* $\omega \wedge \zeta = d\beta$, *pelo que* $\omega \wedge \zeta$ *é exacta.*

□

Exercício 5 [7.4-6 do Fleming (pág. 295)]
Uma função real f é um *factor de integração* para uma forma-1 ω se f nunca se anula e $f\omega$ é exacta. Mostre que se ω admite um factor de integração então $\omega \wedge d\omega = 0$.

Solução: *Por hipótese, existe uma função* f *que nunca se anula e existe uma forma-0 (i.e. uma função)* g *tais que*

$$f\omega = dg \ , \quad \text{ou seja,} \quad \omega = \frac{dg}{f} \ .$$

Então

$$\omega \wedge d\omega = \frac{dg}{f} \wedge d\left(\frac{dg}{f}\right) = \frac{dg}{f} \wedge \left(d\left(\frac{1}{f}\right) \wedge dg\right) = 0$$

porque $dg \wedge dg = 0$. □

Sobre Orientação

Exercício 6 [7.5-4 do Fleming (pág. 305)]
Mostre que $(e^1 + e^4, e^2 + e^5, e^3 + e^6, e^1 + e^5, e^2 + e^6, e^3 - e^4)$ é uma base para $\mathbb{R}^6$. Qual é a orientação desta base?

Solução: *Calcula-se*

$$\begin{array}{rl} & (e^1 + e^4) \wedge (e^2 + e^5) \wedge (e^3 + e^6) \wedge (e^1 + e^5) \wedge (e^2 + e^6) \wedge (e^3 - e^4) \\ = & e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^5 \wedge e^6 \wedge (-e^4) + e^4 \wedge e^5 \wedge e^6 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \\ = & -2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \wedge e^6 \\ \neq & 0 \ , \end{array}$$

onde na primeira igualdade se verificou que todas as outras parcelas são zero. Logo $(e^1 + e^4, e^2 + e^5, e^3 + e^6, e^1 + e^5, e^2 + e^6, e^3 - e^4)$ *é uma base de* $\mathbb{R}^6$ *com orientação*

$$-e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \wedge e^5 \wedge e^6$$

ou seja, com orientação oposta (ou negativa relativamente) à orientação standard. □

Exercício 7 [7.5-6 do Fleming (pág. 305)]
Determine a área do triângulo de vértices $2e_3$, $e_1 - e_2 + 2e_3$ e $e_1 + 3e_3$.

Solução: *Seja* P *o paralelogramo gerado pelos vectores* $v_1 = (e_1 - e_2 + 2e_3) - 2e_3 = e_1 - e_2$ *e* $v_2 = (e_1 + 3e_3) - 2e_3 = e_1 + e_3$ *e seja* Δ *o triângulo do enunciado.*

$$\text{Área}\,(\Delta) = \frac{1}{2}\text{Área}\,(P) = \frac{1}{2}|v_1 \wedge v_2| = \frac{1}{2}|e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_3| = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

□

Sobre Pullback

Exercício 8 [7.6-2 do Fleming (pág. 309)]
Prove que para quaisquer covectores $\omega \in \Lambda^r(\mathbb{R}^n)$ e $\zeta \in \Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ se tem

$$L^*(\omega \wedge \zeta) = L^*\omega \wedge L^*\zeta \ ,$$

onde $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear.

Solução: *Primeiro verifica-se que, para quaisquer índices $1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n$, se tem*

$$L^* e^{i_1,\ldots,i_r} = L^* e^{i_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{i_r} \ .$$

Para mostrar a igualdade destes dois covectores-r, basta verificar que ambos dão o mesmo número real quando avaliados em quaisquer r vectores $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} (L^* e^{i_1,\ldots,i_r})(v_1,\ldots,v_r) &= e^{i_1,\ldots,i_r}(Lv_1,\ldots,Lv_r) \\ &= \det(e^{i^i}(Lv_j)) \qquad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L^* e^{i_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{i_r})(v_1,\ldots,v_r) &= \det(L^* e^{i^i}(v_j)) \\ &= \det(e^{i^i}(Lv_j)) \ . \end{aligned}$$

Para demonstrar a fórmula para covectores-r arbitrários,

$$\omega = \sum \omega_{i's} e^{i's} \qquad \text{e} \qquad \zeta = \sum \zeta_{j's} e^{j's} \ ,$$

onde os índices $i's$ e $j's$ representam multi-índices $i_1, \ldots, i_r$ e $j_1, \ldots, j_s$, por um lado escrevem-se

$$L^*\omega = \sum \omega_{i's} L^* e^{i's} \qquad \text{e} \qquad L^*\zeta = \sum \zeta_{j's} L^* e^{j's}$$

e calcula-se

$$\begin{aligned} L^*\omega \wedge L^*\zeta &= \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} L^* e^{i's} \wedge L^* e^{j's} \\ &= \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} L^* e^{i_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{i_r} \wedge L^* e^{j_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{j_s} \end{aligned}$$

e, por outro lado, como

$$\omega \wedge \zeta = \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} e^{i's} \wedge e^{j's} \ ,$$

tem-se

$$\begin{aligned} L^*(\omega \wedge \zeta) &= L^* \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} e^{i's} \wedge e^{j's} \\ &= \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} L^*(e^{i's} \wedge e^{j's}) \\ &= \sum \omega_{i's}\zeta_{j's} L^* e^{i_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{i_r} \wedge L^* e^{j_1} \wedge \ldots \wedge L^* e^{j_s} \ . \end{aligned}$$

$\square$

Exercício 9 [7.7-1 do Fleming (pág. 311)]
Com $g(s,t) = (st, s\cos t, e^t)$, $g^* : \Omega^r(\mathbb{R}^3) \to \Omega^r(\mathbb{R}^2)$, determine $g^*\omega$ para:

(a) $\omega = x\,dy$.
(b) $\omega = y\,dz \wedge dx$.
(c) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$.
(d) $\omega = f$ (uma forma-0).

Solução:

(a)

$$g^*\omega = g^x\, dg^y = st\, d(s\cos t) = st(\cos t\, ds - s\sin t\, dt)\ .$$

(b)

$$\begin{aligned} g^*\omega &= g^y\, dg^z \wedge dg^x \\ &= s\cos t\, d(e^t) \wedge d(st) \\ &= s\cos t(e^t dt) \wedge (s\, dt + t\, ds) \\ &= -st\cos t\, e^t\, ds \wedge dt\ . \end{aligned}$$

(c)

$$g^*\omega = 0 \qquad \textit{porque qualquer forma-3 em } \mathbb{R}^2 \textit{ é zero.}$$

(d)

$$g^*\omega = f \circ g = f(st, s\cos t, e^t)\ .$$

□

Exercício 10 [7.7-3 do Fleming (pág. 311)]
Para $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g^* : \Omega^r(\mathbb{R}^2) \to \Omega^r(\mathbb{R}^2)$, no caso $r = 1$ com $\omega = M\, dx + N\, dy$, determine $d\omega$ e $g^*\omega$ e verifique que $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$.

Solução: *Tem-se*

$$g^*\omega = M \circ g\, dg^1 + N \circ g\, dg^2\ ,$$

$$\begin{aligned} d(g^*\omega) &= d(M\circ g) \wedge dg^1 + d(N \circ g) \wedge dg^2 \\ &= \left(\tfrac{\partial M}{\partial x} \circ g\, dg^1 + \tfrac{\partial M}{\partial y} \circ g\, dg^2\right) \wedge dg^1 + \left(\tfrac{\partial N}{\partial x} \circ g\, dg^1 + \tfrac{\partial N}{\partial y} \circ g\, dg^2\right) \wedge dg^2 \\ &= \left(\tfrac{\partial N}{\partial x} - \tfrac{\partial M}{\partial y}\right) \circ g\, dg^1 \wedge dg^2\ , \end{aligned}$$

$$d\omega = \left(\tfrac{\partial N}{\partial x} - \tfrac{\partial M}{\partial y}\right) dx \wedge dy\ ,$$

$$g^*(d\omega) = \left(\tfrac{\partial N}{\partial x} - \tfrac{\partial M}{\partial y}\right) \circ g\, dg^1 \wedge dg^2\ .$$

Comparando as expressões acima, verifica-se que $d(g^*\omega) = g^*(d\omega)$. □