Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/Out/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE II – INTEGRAÇÃO EM $\mathbb{R}^N$

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/`

Sobre Medida Nula

Exercício 1 Indique justificadamente quais dos seguintes conjuntos têm medida nula:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin x\}$;
(b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$;
(c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$;
(d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1 \ , \ z = 0\}$;
(e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ , \ x \notin \mathbb{Q} \ , \ n, m \in \mathbb{N}\}$.

Solução:

(a) *O conjunto* $A \subset \mathbb{R}^2$ *tem medida nula porque é o gráfico da função contínua* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$.

(b) *O conjunto* A *é o disco aberto de raio 1 e centro na origem. Sendo um subconjunto aberto e não vazio de* $\mathbb{R}^2$, não *tem medida nula.*

(c) *O conjunto* A *é a esfera de raio 1 e centro na origem em* $\mathbb{R}^3$. *Esta esfera pode ser decomposta em dois gráficos de funções contínuas do disco unitário em* $\mathbb{R}^2$ *para* $\mathbb{R}$: *uma com gráfico o hemisfério norte,* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, *e outra com gráfico o hemisfério sul,* $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. *Cada um destes dois gráficos tem medida nula (até tem conteúdo nulo).*

(d) A *é um disco no plano* $z = 0$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Esse plano tem medida nula, logo* A *tem medida nula.*

(e) *Ignorando a restrição em* x, *escreve-se* A *como um subconjunto de um conjunto maior,*

$$\begin{aligned} A &\subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m} \ , \ n, m \in \mathbb{N}\} \\ &= \cup_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{m}\} \ , \end{aligned}$$

o qual é uma união numerável de circunferências centradas na origem. Cada uma dessas circunferências (é composta por dois gráficos de funções contínuas num intervalo compacto, logo) é um subconjunto de medida nula em $\mathbb{R}^2$. *Uma união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula. Sendo um subconjunto de um conjunto de medida nula,* A *também tem medida nula.*

$\square$

Exercício 2 Dê um exemplo de um conjunto limitado de medida nula cuja fronteira não tenha medida nula.

Solução: *O conjunto S dos números racionais do intervalo $[0,1]$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$ e tem medida nula porque é numerável. A sua fronteira ∂S é todo o intervalo $[0,1]$, o qual, sendo um intervalo não degenerado, não tem medida nula.* □

Exercício 3 [5.1-3 do Fleming (pág. 170)]
Sejam $I_1 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ e $I_2 = [\frac{1}{2}, 2] \times [0,2] \times [-1,2]$. Determine o volume de $I_1 \cup I_2$ e de $I_1 \cap I_2$.

Solução: $\mathrm{Vol}(I_1 \cup I_2) = \frac{19}{2}$ *e* $\mathrm{Vol}(I_1 \cap I_2) = \frac{1}{2}$. □

Exercício 4 [5.2-4 do Fleming (pág. 180)]
Seja $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$, onde $A_k = \{(x,y) : x = \frac{1}{k}, 0 \leq y \leq 1\}$ para $k = 1, 2, \ldots$. Mostre que A tem medida nula.

Solução: *A é uma união numerável de rectângulos degenerados, cada um dos quais tem pois volume nulo.* □

Exercício 5 [5.2-8 do Fleming (pág. 180)]

(a) Mostre que se A e B são conjuntos numeráveis, então $A \cup B$ é numerável.
(b) Mostre que se $B \subset A$ e A é numerável, então B é numerável.
(c) Mostre que se $A_1, A_2, \ldots$ são conjuntos numeráveis, então $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ é numerável.

Solução:

(a) *Um conjunto é numerável se é finito ou se tem uma bijecção para o conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vai-se demonstrar que $A \cup B$ é infinito numerável no caso em que A e B são ambos infinitos numeráveis. (Os casos em que algum dos conjuntos é finito são semelhantes e não mais difíceis.) Sejam $f : \mathbb{N} \to A$ e $g : \mathbb{N} \to B$ bijecções. Então a função $h : \mathbb{N} \to A \cup B$ definida por*

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n}{2}) & \text{se } n \text{ é par} \\ g(\frac{n+1}{2}) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

é sobrejectiva. Como $A \cup B$ é infinito, conclui-se que existe uma bijecção $\mathbb{N} \to A \cup B$.

(b) *Considera-se o caso em que A e B são infinitos. Por hipótese, existe uma bijecção $f : A \to \mathbb{N}$. A restrição $f|_B : B \to \mathbb{N}$ é injectiva. Como B é infinito, conclui-se que existe uma bijecção $B \to \mathbb{N}$.*

(c) *Considera-se o caso em que os A_i's são infinitos. Por hipótese, existem bijecções $f_i : \mathbb{N} \to A_i$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $g(n) = (i(n), j(n))$ uma bijecção (dada, por exemplo, por um argumento em ziguezague sobre os pontos de coordenadas inteiras no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$). Então a função $h : \mathbb{N} \to \cup_i A_i$ definida por $h(n) = f_{i(n)}(j(n))$ é sobrejectiva. Como $\cup_i A_i$ é infinito, conclui-se que existe uma bijecção $\mathbb{N} \to \cup_i A_i$.*

□

Sobre Integrabilidade

Exercício 6 [5.4-2 do Fleming (pág. 190)]
Em cada caso, mostre que f é integrável sobre A.

(a) $f(x) = x^2 e^x$, $A = [0, a]$.
(b) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 5$, $A = [-1, 1]$.
(c) $f(x, y) = \frac{x^4 - y^2}{x^2 - y}$, $A = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1, x^2 \neq y\}$.
(d) $f(x) = 0$ se x é irracional ou $x = 0$, $f(x) = \frac{1}{q}$ se $x = \frac{p}{q}$ onde p e q são inteiros sem factores comuns, $A = [0, 1]$.
(e) $f(x) = 1$ se x é irracional, $f(x) = 0$ se x é racional, $A = [a, b]$.

Solução: *Usa-se os seguintes factos:*
– qualquer função limitada e contínua num intervalo limitado é integrável;
– qualquer função igual q.t.p. a uma função integrável é integrável.

(a) *A função f é limitada e contínua e o conjunto A é um intervalo limitado.*
(b) *Em $A \setminus \{0\}$, a função f é limitada e contínua. O conjunto A é um intervalo limitado e o conjunto $\{0\}$ tem medida nula.*
(c) *O conjunto A está contido no quadrado compacto $B = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. A extensão de f a B dada por 0 nos pontos da curva $x^2 = y$ é igual q.t.p. à função $x^2 + y$ a qual é limitada e contínua.*
(d) *Em $A \setminus \mathbb{Q}$, a função f é identicamente nula. O conjunto A é um intervalo limitado e o conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ tem medida nula.*
(e) *Em $A \setminus \mathbb{Q}$, a função f é constante igual a 1. O conjunto A é um intervalo limitado e o conjunto $A \cap \mathbb{Q}$ tem medida nula.*

□

Exercício 7 Mostre que é integrável a função $f : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sin(xyz) \ , & \text{se } x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q} \ , \\ 1 \ , & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qual é o valor do integral $\int_{[0,1]^3} f$?

Solução: *O conjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$ que satisfazem $x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{Q}$ é uma união numerável (indexada pelos racionais não negativos) de esferas centradas na origem; cada uma dessas esferas é um conjunto de medida nula (por ser composta por dois gráficos de funções contínuas), logo a sua união (numerável) tem medida nula. Portanto a função f é igual q.t.p. à função constante igual a 1, $g : [0, 1]^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = 1$, $\forall (x, y, z) \in [0, 1]^3$. A função g é integrável, logo f também é integrável com o mesmo integral:*

$$\int_{[0,1]^3} f = \int_{[0,1]^3} g = \textit{Vol}\left([0, 1]^3\right) = 1 \ .$$

□

Sobre Integrais Iterados (Teorema de Fubini)

Exercício 8 Calcule os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_S xy\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ com $S = [0, \sqrt{\ln 2}] \times [0, \sqrt{\ln 3}]$;

(b) $\displaystyle\int_S xz\, dx\, dy\, dz$ com $S = \{(x, y, z) \in [0, 2]^3 \mid y \leq x\}$.

Solução: *Pelo teorema de Fubini:*

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{[0,\sqrt{\ln 2}]\times[0,\sqrt{\ln 3}]} xy\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy &= \int_0^{\sqrt{\ln 2}} \int_0^{\sqrt{\ln 3}} xy\, e^{x^2+y^2}\, dy\, dx \\
&= \left(\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x\, e^{x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int_0^{\sqrt{\ln 3}} y\, e^{y^2}\, dy\right) \\
&= \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{\ln 2}} \cdot \left[\tfrac{1}{2} e^{y^2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{\ln 3}} \\
&= \tfrac{2-1}{2} \cdot \tfrac{3-1}{2} = \tfrac{1}{2}\ ;
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_S xz\, dx\, dy\, dz &= \int_0^2 \int_0^2 \int_0^x xz\, dy\, dx\, dz \\
&= \left(\int_0^2 z\, dz\right) \cdot \left(\int_0^2 x \int_0^x\, dy\, dx\right) \\
&= \left[\tfrac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2} \cdot \int_0^2 x^2\, dx \\
&= 2 \cdot \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=2} = \tfrac{16}{3}\ .
\end{aligned}$$

□

Exercício 9 Esboce a região de integração e exprima por uma diferente ordem de integração os seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} f(x, y)\, dy\, dx$;

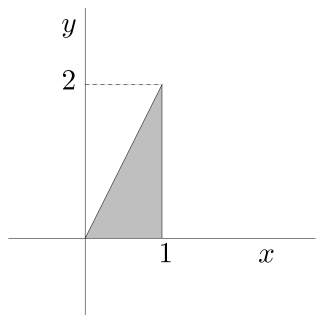
(b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{x}} f(x, y)\, dy\, dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$.

Solução:

(a) *Considerando a figura abaixo, pela ordem de integração inversa, o integral é*

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 f(x,y)\,dx\,dy\ .$$

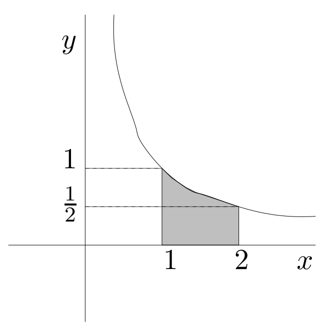


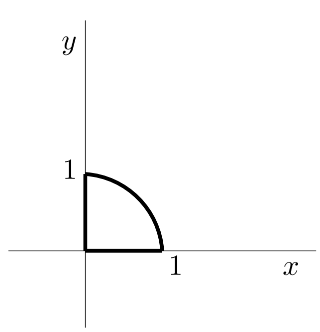
(b) *Considerando a figura abaixo, pela ordem de integração inversa, o integral é*

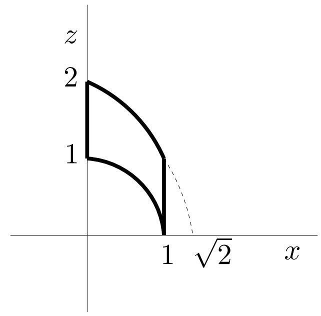
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_1^{\frac{1}{y}} f(x,y)\,dx\,dy\ .$$

(c) *A equação $x = \sqrt{1-y^2}$ representa no plano xy metade da circunferência $x^2+y^2=1$. A projecção da região de integração no plano xy, codificada nos limites dos dois integrais exteriores, é pois o quarto de disco dado por $x, y \geq 0$ e $x^2+y^2 \leq 1$, compreendido entre as linhas a grosso na figura seguinte:*

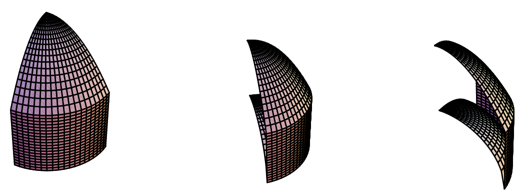
A equação $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ representa o hemisfério norte ($z \geq 0$) da esfera unitária; a equação $z = 2-x^2-y^2$ representa um parabolóide. O corte da região de integração no plano $y=0$ é a zona definida por $0 \leq x \leq 1$ e $\sqrt{1-x^2} \leq z \leq 2-x^2$, limitada pelas curvas a grosso:







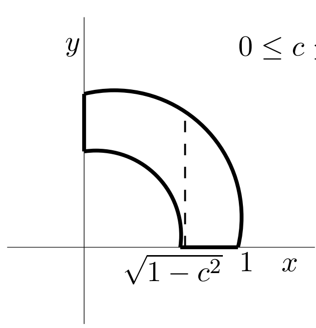
A região de integração é obtida desta superfície no plano xz por revolução de 90º em torno do eixo dos zz. Os troços curvos da fronteira da região de integração estão representados na figura seguinte em três perspectivas; o resto da fronteira é dada por dois pedaços de plano.

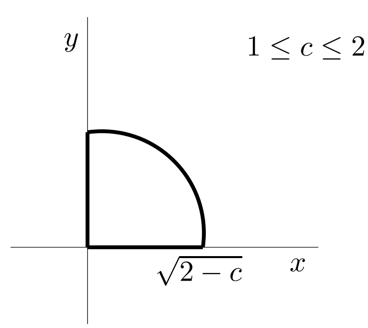


A região é simétrica relativamente ao plano $x = y$ (i.e., ela é invariante por troca das coordenadas x e y). Logo, a partir do integral dado, é simples obter o integral pela ordem de integração $dz\,dy\,dx$ (i.e., trocando apenas dx e dy):

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{1-x^2-y^2}}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx\ .$$

Assim se completa uma possível solução do exercício.
Em alternativa, pode-se considerar os cortes horizontais (i.e., $z =$constante) para obter os integrais pelas ordens $dx\,dy\,dz$ e $dy\,dx\,dz$.





Os cortes $z = c$ com $0 \leq c \leq 1$ são quartos de coroa circular (limitados pela esfera e pelo cilindro): $x^2 + y^2 \geq 1 - c^2$ e $x^2 + y^2 \leq 1$, com $x, y \geq 0$. Os cortes $z = c$ com $1 \leq c \leq 2$ são quartos de disco (limitados pelo parabolóide): $x^2 + y^2 \leq 2 - c$, com $x, y \geq 0$. Por isso, o integral dado pode ser reescrito, mais complicadamente, como

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-x^2}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

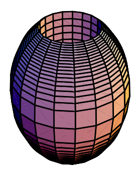
ou, trocando x e y dada a simetria da região,

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{\sqrt{1-z^2-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy + \int_{\sqrt{1-z^2}}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy \right) dz$$
$$+ \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} \int_0^{\sqrt{2-z-y^2}} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz\ .$$

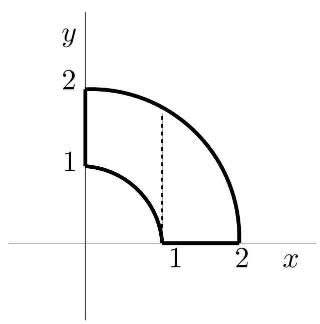
$\square$

Exercício 10 Usando integrais iterados com três diferentes ordens de integração à sua escolha, escreva (sem calcular) três expressões para o volume da porção da bola elipsoidal $2x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8$ exterior ao cilindro vertical de raio 1, i.e., pontos satisfazendo também $x^2 + y^2 \geq 1$.

Solução: *Por simetria da região (a qual parece uma missanga), o volume total é oito vezes o volume da porção no primeiro octante.*



Seja S a porção da região no primeiro octante. A projecção de S no plano xy é o quarto de coroa circular dado por $x, y \geq 0$ e $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ e representado pela zona limitada pelas curvas a grosso na figura seguinte:



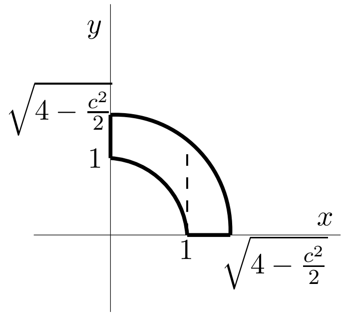
Por invariância da região por troca dos papéis de x e y, obtêm-se logo duas expressões diferentes para o volume pedido:

$$\begin{aligned}\text{Vol} &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\, dy\, dx \right) \\ &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{8-2x^2-2y^2}} dz\, dx\, dy \right)\ .\end{aligned}$$

A intersecção do cilindro com o elipsóide (algebricamente dada pela conjunção das equações $x^2 + y^2 = 1$ e $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 8$, a qual implica que $2 + z^2 = 8$) ocorre em $z = \pm\sqrt{6}$. Os cortes horizontais $z = c$ com $0 \leq c \leq \sqrt{6}$ são quartos de coroa circular dados por

$$x, y \geq 0\ , \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{c^2}{2}\ ,$$

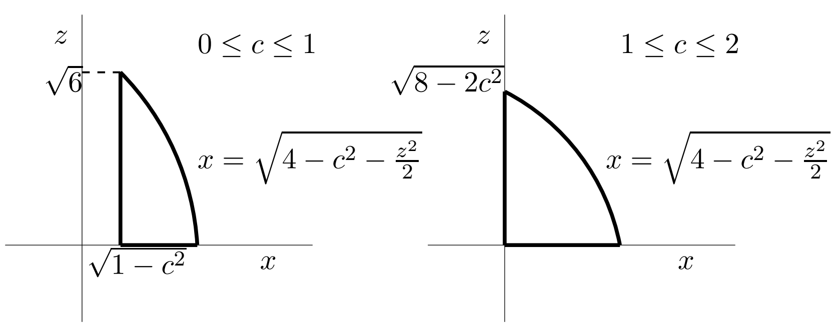
e representados de seguida:



Portanto, outras duas expressões para o volume pedido são:

$$\begin{aligned}
\mathit{Vol} &= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy\,dx + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-x^2}} dy\,dx \right) dz \\
&= 8 \times \int_0^{\sqrt{6}} \left(\int_0^1 \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx\,dy + \int_1^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}}} \int_0^{\sqrt{4-\frac{z^2}{2}-y^2}} dx\,dy \right) dz\ .
\end{aligned}$$

Finalmente, aplica-se de novo a estratégia dos cortes para obter as duas ordens de integração restantes (talvez aqui as menos convenientes das seis possíveis). O aspecto dos cortes $y = c$ tem dois casos.



Quando $1 \leq c \leq 2$, o corte é o quarto de disco elipsoidal dado por $x, z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Quando $0 \leq c \leq 1$, o corte é descrito por $x \geq \sqrt{1-c^2}$, $z \geq 0$ e $2x^2 + z^2 \leq 8 - 2c^2$. Os cortes $x = c$ são análogos, trocando os papéis de x e y. Assim, o volume também pode ser dado por

$$\begin{aligned}
\mathit{Vol} &= 8 \times \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx\,dz\,dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2y^2}} \int_0^{\sqrt{4-y^2-\frac{z^2}{2}}} dx\,dz\,dy \right) \\
&= 8 \times \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{6}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy\,dz\,dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{8-2x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-\frac{z^2}{2}}} dy\,dz\,dx \right)\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 11 [5.5-2 do Fleming (pág. 199)]
Exprima o integral iterado

$$\int_0^1 \int_0^{f(y)} xy\,dx\,dy\ , \qquad \text{onde } f(y) = \text{mín}\{1, \ln\frac{1}{y}\}\ ,$$

como um integral sobre um conjunto $A \in \mathbb{R}^2$, e depois como um integral iterado na ordem inversa. Calcule-o.

Solução:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{f(y)} xy\,dx\,dy &= \int_A xy\,dV = \int_0^1 \int_0^{e^{-x}} xy\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{x}{2} e^{-2x}\,dx = \left[-(\frac{x}{4}+\frac{1}{8})e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}\left(1-3e^{-2}\right)\end{aligned}$$

onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \textit{mín}\{1, \ln\frac{1}{y}\}, 0 \le y \le 1\}$. □

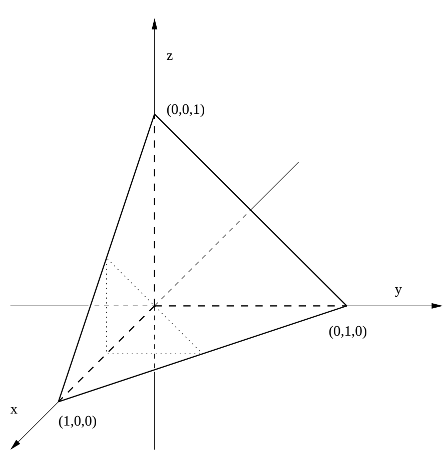
Sobre Esboço de Regiões em $\mathbb{R}^3$

Exercício 12 Esboce a região de $\mathbb{R}^3$ compreendida entre os planos

$$x = 0\ ,\ y = 0\ ,\ z = 0 \ \text{ e } \ x + y + z = 1\ .$$

Descreva os cortes deste conjunto por planos perpendiculares ao eixo Ox (i.e. planos de equação $x =$ const.).

Solução: *A região é o interior de uma pirâmide triangular, limitada pelos três planos coordenados e pelo plano* $x + y + z = 1$. *Essa pirâmide tem vértices nos pontos* $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$, *como na figura abaixo. O corte por um plano* $x = c$ *(com* $0 < c < 1$*) é um triângulo paralelo ao plano* yz *com projecção nesse plano dada pelas equações* $y \ge 0$, $z \ge 0$ *e* $y + z \le 1 - c$*; representa-se um destes cortes a ponteado na figura seguinte.*



□

Exercício 13 Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 4 - 2(x^2+y^2)\ ,\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 1\}\ .$$

(a) Esboce a região A.
(b) Descreva detalhadamente as figuras que se obtêm por intersecção de A com planos horizontais (i.e. planos de equação $z =$ const.).
(c) Descreva detalhadamente as figuras que se obtêm por intersecção de A com planos paralelos ao plano xz (i.e. planos de equação $y =$ const.) .

Solução:

(a) *A região pode ser vista como a intersecção de duas regiões:*
– uma descrita por $0 \le z \le 4 - 2(x^2+y^2)$;
– outra descrita por $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$.

A equação $z = 4 - 2(x^2+y^2)$ representa um parabolóide invertido cujo eixo de simetria é o eixo dos zz (esta superfície pode ser obtida por revolução da parábola descrita por $x = 0$ e $z = 4 - 2y^2$ em torno do eixo dos zz).

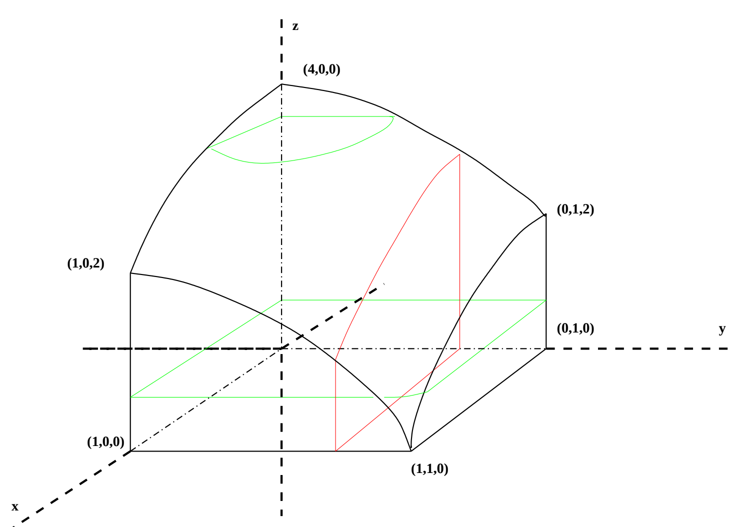
A condição $0 \le z \le 4 - 2(x^2+y^2)$ descreve a região limitada inferiormente pelo plano coordenado xy (de equação $z = 0$) e superiormente pelo parabolóide (de equação $z = 4 - 2(x^2+y^2)$).

As condições $0 \le x \le 1$ e $0 \le y \le 1$ descrevem um prisma quadrangular obtido por deslizamento, ao longo da direcção do eixo dos zz, do quadrado unitário no plano xy, de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(1,1,0)$.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 0, 0 \le y \le 1$ temos $0 \le z \le 4 - 2y^2$, ou seja, a intersecção do sólido com o plano coordenado $x = 0$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \le y \le 1$ e $0 \le z \le 4 - 2y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 0$ e $0 \le x \le 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

Sobre a aresta do quadrado dada por $x = 1, 0 \le y \le 1$, obtemos $0 \le z \le 2 - 2y^2$. Portanto, a intersecção do sólido com o plano $x = 1$ é dada pela região desse plano limitada por $0 \le y \le 1$ e por $0 \le z \le 2 - 2y^2$. Na aresta do quadrado dada por $y = 1$ e $0 \le x \le 1$ obtemos o mesmo resultado substituindo y por x.

O sólido tem a forma na figura seguinte:



(b) *Para $2 \leq z \leq 4$ os cortes horizontais de equação $z = c =$const. são quartos de disco, com raio $\sqrt{2 - c/2}$. O valor do raio é obtido substituindo o valor constante de z na equação do parabolóide: $x^2 + y^2 = 2 - z/2$. Estes cortes estão representados a claro na parte de cima da figura.*

Para $0 \leq z < 2$ estes discos começam a ultrapassar o quadrado e os cortes horizontais na altura $z = c$ com $0 \leq c < 2$ são obtidos pela intersecção do disco de raio $\sqrt{2 - c/2}$ com o quadrado $0 \leq x, y \leq 1$. Estes cortes estão também representados a claro, agora na parte de baixo da figura.

(c) *Os cortes de equação $y =$const. estão representados pela curva a claro na parte direita da figura. São figuras planas limitadas pelas condições $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4 - 2y^2 - 2x^2$, com $y =$const. fixo num valor entre 0 e 1.*

$\square$

Exercício 14 Considere a região $A \subset \mathbb{R}^3$ definida por

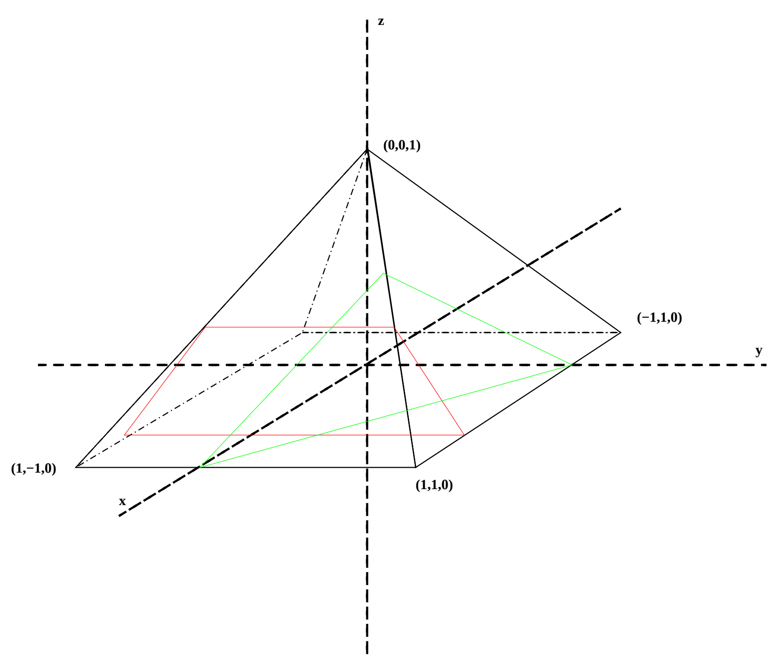
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\ ,\ x + z \leq 1\ ,\ -x + z \leq 1\ ,\ y + z \leq 1\ ,\ -y + z \leq 1\}\ .$$

(a) Esboce a região A.
(b) Descreva detalhadamente as figuras que se obtêm através da intersecção de A com planos paralelos ao plano yz.
(c) Calcule a área da intersecção de A com o plano $x + y = 1$.

Solução:

(a) *A região é o interior de uma pirâmide quadrangular, de vértices nos pontos $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$ e $(1, -1, 0)$, como na figura abaixo.*

As faces laterais da pirâmide são determinadas pelos planos $x + z = 1$, $-x + z = 1$, $y + z = 1$ e $-y + z = 1$. A sua base é o quadrado dado por $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.



(b) *Os cortes obtidos através de planos de equação $x =$const. com $0 \leq x \leq 1$, são quadriláteros limitados pelas linhas $x =$const. e $z = 0$; $x =$const. e $z = 1 - x$; $x =$const. e $y + z = 1$; $x =$const. e $-y + z = 1$, para uma constante entre 0 e 1. Para $-1 \leq x \leq 0$ a resposta é semelhante, apenas aparecendo a equação $z = 1 + x$ em vez de $z = 1 - x$, uma vez que agora o corte intersecta o plano $-x + z = 1$. Estes cortes estão representados pelo quadrilátero a claro na figura.*

(c) *Esta intersecção está representada pelo triângulo a claro na figura. É constituída pelo triângulo limitado pelas três rectas $x + y = 1, z = 0$; $x + z = 1, x + y = 1$; $y + z = 1, x + y = 1$. Os vértices do triângulo são portanto os pontos $(1/2, 1/2, 1/2)$, $(0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. Para calcular a sua área podemos utilizar a fórmula habitual: "um meio da base vezes a altura". A base tem comprimento $\sqrt{2}$ e a altura é $1/2$, logo a área será $\sqrt{2}/4$.*

Em alternativa, podemos descrever a base do triângulo através do segmento de recta $(1, 0, 0) + t(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ com $t \in [0, \sqrt{2}]$. Podemos também observar que as duas arestas superiores deste triângulo vertical são então dadas pelo gráfico da função $z(t)$ com $z(t) = 1 - x(t) = t/\sqrt{2}$, para $t \in [0, \sqrt{2}/2]$, e com $z(t) = 1 - y(t) = 1 - t/\sqrt{2}$, para $t \in [\sqrt{2}/2, \sqrt{2}]$. Logo, a área da figura também pode ser calculada por

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t}{\sqrt{2}}\, dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ .$$

□

Sobre Mudança de Coordenadas

Exercício 15 [5.9-1 do Fleming (pág. 220)]
Seja $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$. Calcule $\int_A xy^2\, dV$ utilizando coordenadas polares.

Solução: *Definindo coordenadas polares onde $-\pi < \theta < \pi$, os pontos do conjunto A são os pontos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas polares $r \leq |a|$ e $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pelo teorema de mudança de coordenadas para o integral, tem-se*

$$\begin{aligned}
\int_A xy^2\, dV &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a (r\cos\theta)(r\sin\theta)^2 r\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^4 \cos\theta \sin^2\theta\, dr\, d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^5}{5} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{a^5}{5} \left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2a^5}{15}\ .
\end{aligned}$$

□

Exercício 16 [5.9-5 do Fleming (pág. 220)]
Determine o volume de $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \geq b^2\}$ onde $a > b$.

Solução: *Em coordenadas cilíndricas (coordenadas esféricas também seriam uma escolha adequada), o conjunto fica descrito pelas desigualdades* $b^2 \leq \rho^2 \leq a^2 - z^2$ *e* $z^2 \leq a^2 - b^2$*.*

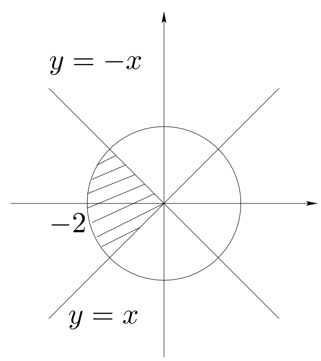
$$\begin{aligned} \text{Volume} &= \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \int_0^{2\pi} \int_b^{\sqrt{a^2-z^2}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(a^2 - z^2 - b^2) \, d\theta \, dz \\ &= \int_{-\sqrt{a^2-b^2}}^{\sqrt{a^2-b^2}} \pi(a^2 - z^2 - b^2) \, dz = \tfrac{4\pi}{3}(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}} . \end{aligned}$$

□

Sobre Volume, Massa, Centróides e Momentos de Inércia

Exercício 17 Determine o centróide de $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x \text{ e } x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solução: *A região A é o quarto de disco representado a tracejado na figura seguinte:*



Em coordenadas polares, A é descrita pelas condições $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ *e* $0 \leq r \leq 2$*. Portanto,*

$$\begin{aligned} \text{Área} = \iint_A 1 \, dx \, dy &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_A x \, dx \, dy &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_0^2 (r\cos\theta) r \, dr \, d\theta \\ &= [\sin\theta]_{\theta=\frac{3\pi}{4}}^{\theta=\frac{5\pi}{4}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2} \\ &= -\frac{8\sqrt{2}}{3} , \end{aligned}$$

pelo que a primeira coordenada do centróide é

$$\overline{x} = \frac{\iint_A x \, dx \, dy}{\text{área}} = -\frac{8\sqrt{2}}{3\pi} .$$

Por simetria da região relativamente ao eixo dos xx (reflexão vertical), a segunda coordenada do centróide é $\overline{y} = 0$. Conclui-se que o centróide de A é o ponto

$$\left(-\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}, 0\right) .$$

□

Exercício 18 Calcule o volume do sólido limitado superiormente pela esfera $x^2+y^2+z^2=5$ e inferiormente pelo parabolóide $x^2+y^2=4z$.

Solução: *As equações algébricas que traduzem a curva de intersecção da esfera com o parabolóide são dadas pela conjunção das equações dessas superfícies:*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ x^2+y^2=4z \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad z^2+4z-5=0 \quad \Longrightarrow \quad z=1 \textit{ ou } z=-5 \ .$$

Deduz-se que a intersecção da esfera com o parabolóide ocorre na circunferência descrita por $z=1$ *e* $x^2+y^2=4$. *A projeccção do sólido no plano* xy *é o disco de raio 2 centrado na origem* $x^2+y^2\leq 4$. *Em coordenadas cilíndricas, o parabolóide fica com equação* $\rho^2=4z$ *e a esfera com equação* $\rho^2+z^2=5$*, pelo que o sólido é o conjunto dos pontos* $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$ *satisfazendo*

$$0\leq\rho\leq 2 \ , \ 0\leq\theta<2\pi \ \textit{ e } \ \frac{\rho^2}{4}\leq z\leq\sqrt{5-\rho^2} \ .$$

O volume do sólido é:

$$\begin{aligned} \textit{Volume} &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{\sqrt{5-\rho^2}} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= 2\pi\int_0^2\left(\rho\sqrt{5-\rho^2}-\tfrac{\rho^3}{4}\right)d\rho \\ &= 2\pi\left[-\tfrac{1}{3}(5-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{\rho^4}{16}\right]_{\rho=0}^{\rho=2} \\ &= \tfrac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-4) \ . \end{aligned}$$

□

Exercício 19 Considere o sólido

$$B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 1\leq x^2+y^2\leq 2 \ \text{ e } \ 0\leq z\leq 2-(x^2+y^2)\} \ .$$

(a) Descreva B em coordenadas cilíndricas.
(b) Calcule o volume de B.
(c) Supondo que B é homogéneo, i.e., com densidade de massa constante k, calcule, em função de k, o momento de inércia de B em relação ao eixo definido por $x=1$ e $z=0$.

Solução:

(a)

$$B=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 1\leq\rho\leq\sqrt{2} \ , \ 0\leq\theta<2\pi \ \textit{ e } \ 0\leq z\leq 2-\rho^2\} \ .$$

(b)

$$\begin{aligned} \textit{Volume } (B) &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2-\rho^2}\rho\, dz\, d\rho\, d\theta \\ &= 2\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(2\rho-\rho^3\right)d\rho \\ &= 2\pi\left[\rho^2-\tfrac{\rho^4}{4}\right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \\ &= 2\pi\left(2-1-1+\tfrac{1}{4}\right) \\ &= \tfrac{\pi}{2} \ . \end{aligned}$$

(c) *O quadrado da distância de um ponto* (x, y, z) *à recta* $x = 1$ *e* $z = 0$ *é* $d^2 = (x-1)^2 + z^2$, *pelo que o momento de inércia pedido é*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2-\rho^2} k\left((\rho\cos\theta-1)^2+z^2\right)\rho\,dz\,d\rho\,d\theta \\
&= k\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2-\rho^2}\left(\rho^3\cos^2\theta-2\rho^2\cos\theta+\rho+\rho z^2\right)\,dz\,d\rho\,d\theta \\
&= k\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{2-\rho^2}\left(\pi\rho^3+2\pi\rho+2\pi\rho z^2\right)\,dz\,d\rho \\
&= k\pi\int_1^{\sqrt{2}}\left(2\rho^3-\rho^5+4\rho-2\rho^3+2\rho\frac{(2-\rho^2)^3}{3}\right)\,d\rho \\
&= k\pi\left[-\frac{\rho^6}{6}+2\rho^2-\frac{1}{12}(2-\rho^2)^4\right]_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{2}} \\
&= k\frac{11\pi}{12}\ ,
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade se usou que o integral sobre $[0, 2\pi]$ *de* $\cos\theta$ *é zero e o de* $\cos^2\theta$ *é* π *(i.e., metade do integral de* $\cos^2\theta + \sin^2\theta$*).*

□

Exercício 20 Calcule a massa do sólido limitado pelo elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, sabendo que a sua densidade de massa é

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\ .$$

Solução: *Convém utilizar coordenadas "elipsoidais", i.e., uma adaptação das coordenadas esféricas a este tipo de simetria:*

$$\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta \\ y = br\sin\varphi\sin\theta \\ z = cr\cos\varphi\ . \end{cases}$$

Notando a relação desta mudança de coordenadas com a das coordenadas esféricas, deduz-se que o seu jacobiano é $-abcr^2\sin\varphi$*. A bola elipsoidal fica descrita pela condição* $\rho \leq 1$ *e a densidade de massa em cada ponto é* r^2*. A massa do sólido é dada pelo integral*

$$\begin{aligned}
\textit{Massa} &= \iiint 1\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2|-abcr^2\sin\varphi|\,dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= 2\pi abc\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^1 r^4\,dr \\
&= 2\pi abc\cdot 2\cdot\frac{1}{5} \\
&= \frac{4}{5}\pi abc\ .
\end{aligned}$$

□

Exercício 21 [5.5-4 do Fleming (pág. 199)]
Determine o volume de

$$\{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| \leq 2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}\ .$$

Solução: *Uma vez que o sólido é simétrico por reflexões relativamente aos três planos coordenados* ($x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ *e* $z \mapsto -z$)*, o seu volume é oito vezes o volume da porção do sólido no primeiro* *quadrante (onde $x, y, z \geq 0$):*

$$\text{Volume } = 8 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} 1\, dz\, dy\, dx = 8 \int_0^1 \int_0^1 (2-x-y)\, dy\, dx = 8 \int_0^1 (\frac{3}{2} - x)\, dx = 8 \ .$$

$\square$

Exercício 22 [5.8-4 do Fleming (pág. 216)]
Seja B um conjunto compacto, $\bar{x}$ o seu centróide e g uma transformação afim. Mostre que $g(\bar{x})$ é o centróide de $g(B)$.

Solução: *Uma transformação afim $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é da forma $g(x) = x_0 + L(x)$ onde x_0 é um vector fixo de $\mathbb{R}^n$ e L é uma transformação linear. Seja M a matriz que representa L na base standard de $\mathbb{R}^n$ e sejam $g^1, \ldots, g^n$ as funções coordenadas de g. A jacobiana de g é dada por $g'(x) = M$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. O centróide de B é o ponto*

$$\bar{x} = \left(\frac{\int_B x^1\, dV}{\int_B 1\, dV}, \ldots, \frac{\int_B x^n\, dV}{\int_B 1\, dV} \right) \ .$$

O centróide de $g(B)$ é o ponto

$$\bar{y} = \left(\frac{\int_{g(B)} x^1\, dV}{\int_{g(B)} 1\, dV}, \ldots, \frac{\int_{g(B)} x^n\, dV}{\int_{g(B)} 1\, dV} \right) \ .$$

Aplicando o teorema de mudança de coordenadas a estes últimos integrais, obtém-se

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= \left(\tfrac{\int_B g^1 |\det M|\, dV}{\int_B |\det M|\, dV}, \ldots, \tfrac{\int_B g^n |\det M|\, dV}{\int_B |\det M|\, dV} \right) \\
&= \left(\tfrac{\int_B g^1\, dV}{\int_B\, dV}, \ldots, \tfrac{\int_B g^n\, dV}{\int_B\, dV} \right) \\
&= \left(\tfrac{\int_B (x_0^1 + L^1)\, dV}{\int_B\, dV}, \ldots, \tfrac{\int_B (x_0^n + L^n)\, dV}{\int_B\, dV} \right) \\
&= (x_0^1, \ldots, x_0^n) + \left(\tfrac{\int_B L^1\, dV}{\int_B\, dV}, \ldots, \tfrac{\int_B L^n\, dV}{\int_B\, dV} \right) \\
&= (x_0^1, \ldots, x_0^n) + L \left(\tfrac{\int_B x^1\, dV}{\int_B\, dV}, \ldots, \tfrac{\int_B x^n\, dV}{\int_B\, dV} \right) \\
&= x_0 + L(\bar{x}) \ ,
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade se usou a linearidade do integral. $\square$