Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 17/Set/2005

ANÁLISE MATEMÁTICA III A – OUTONO 2005

PARTE I – VARIEDADES EM $\mathbb{R}^N$

EXERCÍCIOS COM POSSÍVEIS SOLUÇÕES ABREVIADAS

acessível em `http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/AMIII/`

Sobre Topologia em $\mathbb{R}^n$

Exercício 1-14 do Spivak **[conjuntos abertos]**
Prove que qualquer união de conjuntos abertos (mesmo que sejam infinitos conjuntos) é sempre um conjunto aberto. Prove que a intersecção de dois conjuntos abertos, e portanto também para qualquer intersecção finita de abertos, é ainda um conjunto aberto. Apresente um contra-exemplo para o caso da intersecção de infinitos conjuntos abertos.

Solução: *Dizer que um ponto x está numa união de conjuntos abertos $\cup_{i\in I} A_i$ quer dizer que x pertence a pelo menos um desses A_i's; chame-se A_0 a um aberto da união que contém x. Como A_0 é aberto, há um rectângulo aberto R tal que $x \in R \subseteq A_0$. Mas então o rectângulo aberto R satisfaz $x \in R \subseteq \cup_{i\in I} A_i$. Para cada $x \in \cup_{i\in I} A_i$ obtém-se um rectângulo nestas circunstâncias, portanto conclui-se que $\cup_{i\in I} A_i$ é aberto (qualquer que seja o conjunto de índices I).*

Para mostrar que a intersecção $A \cap B$ de dois abertos A e B é aberta, há que verificar que qualquer ponto $x \in A \cap B$ tem uma vizinhança rectangular contida em $A \cap B$. Como A é aberto e $x \in A$, existe um rectângulo aberto R tal que $x \in R \subseteq A$. Como B é aberto e $x \in B$, existe um rectângulo aberto S tal que $x \in S \subseteq B$. Ora a intersecção dos rectângulos R e S é ainda um rectângulo aberto (verificar!) contendo x e esse rectângulo intersecção está contido em $A \cap B$. Por indução, pode-se mostrar que qualquer intersecção finita de abertos é um aberto.

Uma intersecção infinita de abertos pode ser um conjunto não aberto. Por exemplo:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\} \ .$$

$\square$

Exercício 1-16 do Spivak **[interior, exterior e fronteira]**
Determine o interior, o exterior e a fronteira dos conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\},\ B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},\ C = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ cada } x^i \text{ é racional }\}.$$

Solução: *Para A (o disco fechado de raio 1 centrado na origem) tem-se*

$$\mathit{Int}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}\ , \qquad \mathit{Ext}\, A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\ , \qquad \partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}\ .$$

Para B (a cirunferência de raio um centrada na origem, a qual é um conjunto fechado) tem-se

$$\mathit{Int}\, B = \emptyset\ , \qquad \mathit{Ext}\, B = \mathbb{R}^n \setminus B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \neq 1\}\ , \qquad \partial B = B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}\ .$$

Para C (o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^n$ que têm todas as coordenadas racionais) tem-se

$$\mathit{Int}\, C = \emptyset \ , \qquad \mathit{Ext}\, C = \emptyset \ , \qquad \partial C = \mathbb{R}^n \ .$$

□

Exercício 1-10 do Spivak **[transformações lineares]**
Para uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mostre que existe um número M tal que $|T(h)| \leq M|h|$ para todo o $h \in \mathbb{R}^n$.

> **Sugestão:** Estime $|T(h)|$ em termos de $|h|$ e das entradas da matriz que representa T.

Solução: *Se (a_{ij}) é a matriz que representa a transformação T e A é o máximo dos $|a_{ij}|$'s, então, usando a desigualdade triangular e o facto de qualquer coordenada h^j de um vector h ser em módulo menor do que a norma desse vector, obtém-se:*

$$|T(h)| = \left| \sum_{i,j} a_{ij} h^j e_i \right| \leq \sum_{i,j} |a_{ij} h^j e_i| = \sum_{i,j} |a_{ij}| \cdot |h^j| \leq \sum_{i,j} A \cdot |h^j| \leq \sum_{i,j} A \cdot |h| \leq m \cdot n \cdot A \cdot |h| \ ,$$

pois o somatório tem $m \cdot n$ parcelas. Tome-se $M = m \cdot n \cdot A$. □

Exercício 1-25 do Spivak **[continuidade]**
Prove que uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua.

> **Sugestão:** Exercício anterior.

Solução: *Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, escolha-se $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, onde M é como no exercício 1-10 (assume-se que $M > 0$; se for $M = 0$, então T é a transformação que leva todos os vectores para o vector zero, e nesse caso a continuidade é trivial). Assim tem-se*

$$|x - y| < \delta = \frac{\varepsilon}{M} \quad \Longrightarrow \quad |T(x) - T(y)| = |T(x - y)| \leq M|x - y| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \ .$$

□

Sobre Derivação de Funções $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Exercício 2-1 do Spivak **[continuidade vs. diferenciabilidade]**
Prove que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $a \in \mathbb{R}^n$, então f é contínua em a.

> **Sugestão:** Exercício 1-10 do Spivak (acima).

Solução: *Seja T a derivada de f no ponto a. Como, se uma fracção tende para zero, então o seu numerador tem que ir para zero, tem-se*

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - T(h)|}{|h|} = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} |f(a+h) - f(a) - T(h)| = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) = \lim_{h \to 0} T(h) = 0 \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do exercício 1-10 (ou da continuidade de T provada no exercício 1-25). □

Exercício 2-6 do Spivak **[falha de diferenciabilidade]**
Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Solução: *Uma vez que $f(x,0) = 0$, $\forall x$ e $f(0,y) = 0$, $\forall y$, as derivadas parciais de f em ordem a x e a y são zero no ponto $(0,0)$. Se f fosse diferenciável em $(0,0)$, então a sua derivada seria dada pela matriz jacobiana*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = [0 \quad 0] \ ,$$

pelo que a derivada seria zero. No entanto, pondo a derivada igual a zero na expressão do limite envolvido na definição de derivada, e escolhendo a direcção da diagonal positiva para h, tem-se

$$\lim_{(h,h)\to 0} \frac{|f(h,h) - f(0,0) - 0|}{|(h,h)|} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h^2|}}{\sqrt{h^2+h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{|h|\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ,$$

o que não é zero como deveria ser se f fosse diferenciável em $(0,0)$. □

Exercício 2-10 do Spivak, (a)-(c) **[cálculo de derivadas]**
Use regras para o cálculo de derivadas para determinar Df de:

(a) $f(x,y,z) = x^y$,
(b) $f(x,y,z) = (x^y, z)$,
(c) $f(x,y) = \sin(x \sin y)$.

Solução:

(a) *Escreve-se f como composição de funções elementares:*

$$f(x,y,z) = x^y = e^{y \ln x} = \exp \circ p \left(\ln \circ \pi^1(x,y,z), \pi^2(x,y,z)\right)$$

onde $\exp x = e^x$ é a exponencial, $p(x,y) = x \cdot y$ é a função produto e π^i é a projecção na i-ésima coordenada. Usando a regra da cadeia para a derivada da composta e usando o conhecimento das derivadas das funções elementares $\exp$, p, $\ln$, π^1 e π^2, obtém-se que a derivada de f no ponto (x,y,z) segundo o vector (h,k,l) é

$$\begin{aligned}
& (Df(x,y,z))\,(h,k,l) \\
= \ & \underbrace{(D\exp(y\ln x))}_{e^{y\ln x}} \circ Dp(y,\ln x) \circ \left(\underbrace{D\pi^2(x,y,z)}_{\pi^2}, \underbrace{D\ln(x)}_{\frac{1}{x}} \circ \underbrace{D\pi^1(x,y,z)}_{\pi^1} \right)(h,k,l) \\
= \ & \underbrace{e^{y\ln x}}_{x^y} \underbrace{Dp(y,\ln x)(k, \frac{1}{x}h)}_{(\ln x)k + y\frac{1}{x}h} \ = \ y x^{y-1} h + (\ln x) x^y k \ .
\end{aligned}$$

Matricialmente,

$$Jf(x,y,z) \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} yx^{y-1} & (\ln x)x^y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

ou seja, a matriz jacobiana é $Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} yx^{y-1} & (\ln x)x^y & 0 \end{bmatrix}$.

(b) *Chamando agora* $g(x,y,z) = x^y$ *à função da alínea anterior, tem-se*

$$f(x,y,z) = \left(g(x,y,z), \pi^3(x,y,z)\right) \ .$$

Logo,

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} Dg(x,y,z) \\ D\pi^3(x,y,z) \end{bmatrix} \ ,$$

pelo que

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} yx^{y-1} & (\ln x)x^y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

(c) *Em termos de composição de funções elementares, tem-se*

$$f(x,y) = \sin \circ p \left(\pi^1(x,y), \sin \circ \pi^2(x,y)\right) \ .$$

A derivada no ponto (x,y) *segundo o vector* (h,k) *é*

$$\begin{aligned} & \left(Df(x,y)\right)(h,k) \\ = & \left(\underbrace{D(\sin(x \sin y))}_{\cos(x\sin y)}\right) \circ Dp(x,\sin y) \circ \left(\underbrace{D\pi^1(x,y)}_{\pi^1}, \underbrace{D\sin y}_{\cos y} \circ \underbrace{D\pi^2(x,y)}_{\pi^2}\right)(h,k) \\ = & \cos(x\sin y)\, \underbrace{Dp(x,\sin y)(h,(\cos y)k)}_{(\sin y)h + x(\cos y)k} = \cos(x\sin y)(\sin y)h + \cos(x \sin y)x(\cos y)k \ . \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$Jf(x,y)\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(x\sin y)(\sin y) & \cos(x\sin y)x(\cos y)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

ou seja, a matriz jacobiana é $Jf(x,y) = \begin{bmatrix}\cos(x\sin y)(\sin y) & \cos(x\sin y)x(\cos y)\end{bmatrix}$.

□

Exercício 2-17 do Spivak, (d)-(f) **[cálculo de derivadas parciais]**
Determine as derivadas parciais das seguintes funções:

(d) $f(x,y,z) = \sin(x \sin(y \sin z))$,
(e) $f(x,y,z) = x^{y^z}$,
(f) $f(x,y,z) = x^{y+z}$.

Solução: *Aplica-se a regra da cadeia.*

(d)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos(x\sin(y\sin z))\sin(y \sin z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos(x\sin(y\sin z))x\cos(y\sin z)\sin z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \cos(x\sin(y\sin z))x\cos(y\sin z)y\cos z \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y^z x^{y^z-1}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (\ln x)x^{y^z} zy^{z-1}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= (\ln x)x^{y^z}(\ln y)y^z\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= (y+z)x^{y+z-1}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (\ln x)x^{y+z}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= (\ln x)x^{y+z}\end{aligned}$$

$\square$

Exercício 2-18 do Spivak **[cálculo de derivadas parciais]**
Ache as derivadas parciais das seguintes funções, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua:

(a) $f(x,y) = \int_a^{x+y} g$,

(b) $f(x,y) = \int_y^{x} g$,

(c) $f(x,y) = \int_a^{xy} g$,

(d) $f(x,y) = \int_a^{(\int_b^y g)} g$.

Solução: *Usa-se a regra da cadeia e o teorema fundamental do cálculo ($\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x g = g(x)$).*

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x+y)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = g(x+y)$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = -g(y)$

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = yg(xy)$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = xg(xy)$

(d) $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y} = g(\int_b^y g)g(y)$

$\square$

Exercício 2-24 do Spivak **[segundas derivadas parciais diferentes]**
Defina $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \ , \\ 0 & (x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ para todo o x e que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo o y.
(b) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Solução:

(a) *Para $x \neq 0$, calcula-se $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ aplicando as regras habituais à expressão $xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}f(x,0) &= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\right]_{y=0} \\ &= \left[x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]_{y=0} \\ &= x \ . \end{aligned}$$

Para $x = 0$, tem que se calcular $\frac{\partial f}{\partial y}f(0,0)$ pela definição:

$$\frac{\partial f}{\partial y}f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \ .$$

Conclui-se que $\frac{\partial f}{\partial y}f(x,0) = x$, $\forall x$. De modo análogo, obtém-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}f(0,y) = -y \ \ \textit{para } y \neq 0 \qquad \textit{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}f(0,0) = 0 \ ,$$

pelo que $\frac{\partial f}{\partial x}f(0,y) = -y$, $\forall y$.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}f(0,y)\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right]_{y=0} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial}{\partial x}x\right]_{x=0} = 1 \ . \end{aligned}$$

□

Exercício 2-32 do Spivak **[diferenciabilidade sem derivadas contínuas]**

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \ , \\ 0 & x = 0 \ . \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em 0 mas que a derivada f' não é contínua em 0.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq 0 \ , \\ 0 & (x,y) = 0 \ . \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$ mas que as derivadas parciais de f não são contínuas em $(0,0)$.

Solução:

(a) *Para $x \neq 0$, calcula-se $f'(x)$ aplicando as regras habituais à expressão $x^2 \sin \frac{1}{x}$:*

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \ .$$

Para $x = 0$, verifica-se que f é diferenciável e calcula-se $f'(0)$ pela definição:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{1}{h} \right) = 0 \ ,$$

onde a última igualdade segue do facto de o produto de uma função limitada por uma função que tende para zero ser uma função que tende para zero. Como $\lim_{x \to 0} f'(x) = -\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ não existe, conclui-se que $f'(x)$ não é contínua em 0.

(b) *Para $(x,y) \neq (0,0)$, calculam-se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ aplicando as regras habituais à expressão $(x^2+y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \ . \end{aligned}$$

Para $(x,y) = (0,0)$, calculam-se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ pela definição

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{1}{|h|} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{1}{|h|} \right) = 0 \end{aligned}$$

e aproveita-se estes cálculos para mostrar, pela definição, que f é diferenciável em $(0,0)$ com derivada a transformação linear 0:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 0 \cdot k|}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left(\sqrt{h^2+k^2} \sin \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right) = 0 \ .$$

Como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

não existem (por exemplo, tomando $y = 0$ na primeira expressão, tem-se que $\lim_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{|x|}$ não existe), conclui-se que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ não são contínuas em $(0,0)$.

$\square$

Sobre os Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

Exercício [teorema da função inversa]
Prove que o sistema

$$\begin{cases} u &= xy \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases}$$

é invertível nalguma vizinhança do ponto $(x,y) = (1,2)$. Calcule as derivadas $\frac{\partial x}{\partial v}(2,2)$ e $\frac{\partial y}{\partial u}(2,2)$.

Solução: *Considere-se a função de classe C^1 no seu domínio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$,*

$$f(x,y) = (u,v) = (xy, \frac{y}{x}) \ .$$

A jacobiana de f é

$$Jf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{bmatrix} ,$$

a qual no ponto $(x,y) = (1,2)$ tem determinante

$$\det Jf(1,2) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 4 \neq 0 \ .$$

Pelo teorema da função inversa, conclui-se que f é invertível numa vizinhança do ponto $(1,2)$, ou seja, que o sistema dado é invertível numa vizinhança de $(1,2)$.

A jacobiana de $f^{-1}(u,v) = (x,y)$ no ponto $(2,2) = f(1,2)$,

$$Jf^{-1}(2,2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(2,2) & \frac{\partial x}{\partial v}(2,2) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(2,2) & \frac{\partial y}{\partial v}(2,2) \end{bmatrix} ,$$

é a matriz inversa da jacobiana de f em $(1,2)$,

$$[Jf(1,2)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial u}{\partial y}(1,2) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1,2) & \frac{\partial v}{\partial y}(1,2) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} ,$$

donde se conclui que $\frac{\partial x}{\partial v}(2,2) = -\frac{1}{4}$ e que $\frac{\partial y}{\partial u}(2,2) = \frac{1}{2}$. $\square$

Exercício [teorema da função implícita]
Mostre que o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido pela equação

$$yx + \cos x + \sin(xy) = \cos 1$$

pode ser representado, nalguma vizinhança do ponto $(1, 0)$, pelo gráfico de uma função $y = f(x)$ de classe C^1. Calcule a derivada $f'(1)$.

Solução: *Considere-se a função de classe C^1 no seu domínio $\mathbb{R}^2$,*

$$F(x, y) = yx + \cos x + \sin(xy) - \cos 1 \ .$$

Como $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x + x\cos(xy)$, tem-se que $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 2 \neq 0$. Pelo teorema da função implícita, conclui-se que a equação dada $F(x, y) = 0$ tem, numa vizinhança de $(1, 2)$, uma solução dada por uma função de classe C^1, $y = f(x)$, ou seja, que os pontos que satisfazem a equação dada são localmente os do gráfico deste f.

A equação $F(x, f(x)) = 0$ vale em toda uma vizinhança de $x = 1$. Derivando-a pela regra da cadeia (derivada da função composta), obtém-se que nessa vizinhança

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0 \ ,$$

i.e., que

$$(f(x) - \sin x + f(x)\cos(xf(x))) + (x + x\cos(xf(x)))\, f'(x) = 0 \ ,$$

o que quando $x = 1$ e $f(x) = 0$ dá

$$-\sin 1 + 2f'(1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(1) = \frac{\sin 1}{2} \ .$$

□

Exercício 4.5-1 do Fleming (pág. 147) **[teorema da função inversa]**
Determine se $\det Jg(x) \neq 0$ para todo o $x \in \Delta$. Determine a imagem $g(\Delta)$. Se g for bijectiva, determine g^{-1} explicitamente.

(a) $g(x) = x + x_0$ (uma translação), $\Delta = \mathbb{R}^n$.
(b) $g(s, t) = (s + 2t)e_1 + (s - t)e_2$, $\Delta = \mathbb{R}^2$.
(c) $g(s, t) = (s^2 - s - 2)e_1 + 3te_2$, $\Delta = \mathbb{R}^2$.
(d) $g(s, t) = (s^2 - t^2)e_1 + ste_2$, $\Delta = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
(e) $g(s, t) = (\ln st)e_1 + \frac{1}{s^2+t^2}e_2$, $\Delta = \{(s, t) : 0 < t < s\}$.

Solução:

(a) $\det Jg(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$. *O jacobiano de g nunca se anula.*
A imagem é $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
g é bijectiva com inversa $g^{-1}(x) = x - x_0$.
(b) $\det Jg(s, t) = -3$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$. *O jacobiano de g nunca se anula.*
A imagem é $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.
g é bijectiva com inversa $g^{-1}(x, y) = \frac{1}{3}(x + 2y, x - y)$.
(c) $\det Jg(s, t) = 6s - 3$. *O jacobiano de g anula-se sobre a recta $s = \frac{1}{2}$.*
A imagem é o semi-plano $g(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\frac{9}{4}\}$.
g não é bijectiva; por exemplo, $g(0, 0) = g(1, 0)$.

(d) $\det Jg(s,t) = 2s^2 + 2t^2$. *O jacobiano de g nunca se anula em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
A imagem é $g(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
g não é bijectiva porque $g(s,t) = g(-s,-t)$, $\forall (s,t)$.

(e) $\det Jg(s,t) = -\frac{2}{st(s^2+t^2)}$. *O jacobiano de g nunca se anula.*
A imagem é $g(\Delta) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < \frac{1}{2}e^{-x}\}$.
g é bijectiva com inversa $g^{-1}(x,y) = \frac{1}{2}(a+b, a-b)$, onde $a = \sqrt{\frac{1}{y} + 2e^x}$ e $b = \sqrt{\frac{1}{y} - 2e^x}$.

$\square$

Exercício 4.6-1 do Fleming (pág. 152) **[derivadas da função implícita]**
Para F de classe C^2 com $F(x, \phi(x)) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x)) \neq 0$, $\forall x$, determine expressões para ϕ' e ϕ''.

Solução:

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\phi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\phi(x))} \qquad \textit{e} \qquad \phi''(x) = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} - 2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

onde a última fracção deve ser avaliada no ponto de coordenadas $(x, \phi(x))$. $\square$

Exercício 4.6-3 do Fleming (pág. 152) **[teorema da função implícita]**
Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F = (f, g)$ com $f(x) = (x^2)^2 + (x^4)^2 - 2x^1x^3$ e $g(x) = (x^2)^3 + (x^4)^3 + (x^1)^3 - (x^3)^3$. Seja $a = (1, -1, 1, 1)$.

(a) Mostre que as hipóteses do teorema da função implícita são satisfeitas para expressar (x^1, x^3) implicitamente em função de (x^2, x^4) perto de a.

(b) Chame-se $(\phi, \psi) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ à função de (x^2, x^4) definida implicitamente pela equação
$$F(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$$
com $\phi(-1, 1) = 1$ e $\psi(-1, 1) = 1$. Chamando (x, y) a (x^2, x^4), de acordo com a definição de F tem-se
$$x^2 + y^2 - 2\phi(x,y)\psi(x,y) = 0 \qquad e$$
$$x^3 + y^3 + (\phi(x,y))^3 - (\psi(x,y))^3 = 0$$
para todo o (x, y) suficientemente próximo de $(-1, 1)$. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de ϕ e ψ no ponto $(-1, 1)$.

Solução:

(a) *A função F é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^4$ com $F(1, -1, 1, 1) = 0$ e a matriz das derivadas parciais das coordenadas f e g de F em ordem a x^1 e x^3,*
$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} & \frac{\partial f}{\partial x^3} \\ \frac{\partial g}{\partial x^1} & \frac{\partial g}{\partial x^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x^3 & -2x^1 \\ 3(x^1)^2 & -3(x^3)^2 \end{bmatrix},$$
tem determinante $\det M(x^1, x^2, x^3, x^4) = 6[(x^1)^3 + (x^3)^3]$ diferente de 0 no ponto $a = (1, -1, 1, 1)$.

(b) *Tomando as derivadas parciais das equações componentes de $F(\phi(x,y), x, \psi(x,y), y) = 0$, ou seja, tomando as derivadas parciais de*

$$\begin{cases} f(\phi(x,y), x, \psi(x,y), y) = 0 \\ g(\phi(x,y), x, \psi(x,y), y) = 0 \ , \end{cases}$$

em ordem a x, obtém-se

$$\begin{cases} 2x - 2\frac{\partial\phi}{\partial x}\psi - 2\phi\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \\ 3x^2 + 3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial x} - 3\psi^2\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \ , \end{cases}$$

donde avaliando no ponto $(-1,1)$ sai

$$\begin{cases} -2 - 2\frac{\partial\phi}{\partial x}(-1,1) - 2\frac{\partial\psi}{\partial x}(-1,1) = 0 \\ 3 + 3\frac{\partial\phi}{\partial x}(-1,1) - 3\frac{\partial\psi}{\partial x}(-1,1) = 0 \ , \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x}(-1,1) = -1 \\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(-1,1) = 0 \ . \end{cases}$$

Tomando as derivadas parciais das equações componentes de $F(\phi(x,y), x, \psi(x,y), y) = 0$ em ordem a y, obtém-se

$$\begin{cases} 2y - 2\frac{\partial\phi}{\partial y}\psi - 2\phi\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \\ 3y^2 + 3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial y} - 3\psi^2\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \ , \end{cases}$$

donde avaliando no ponto $(-1,1)$ sai

$$\begin{cases} 2 - 2\frac{\partial\phi}{\partial y}(-1,1) - 2\frac{\partial\psi}{\partial y}(-1,1) = 0 \\ 3 + 3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial y}(-1,1) - 3\frac{\partial\psi}{\partial y}(-1,1) = 0 \ , \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial y}(-1,1) = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(-1,1) = 1 \ . \end{cases}$$

$\square$

Sobre Variedades

Exercício [variedade como conjunto de nível]
Considere o conjunto

$$X = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 \ , \ z^2 + w^2 = 1\}$$

(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão 2.
(b) Determine o seu espaço tangente e o seu espaço normal no ponto $(1,0,1,0)$.

Solução:

(a) *O conjunto X é o nível zero da função*

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \ , \quad F(x,y,z,w) = (x^2 + y^2 - 1, z^2 + w^2 - 1) \ .$$

A matriz jacobiana desta função é

$$JF(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2w \end{bmatrix}$$

a qual tem característica 2 (i.e., tem as duas linhas linearmente independentes, i.e., tem duas colunas linearmente independentes, i.e., representa uma transformação linear sobrejectiva, etc.) em todos pontos de X (a matriz $JF(x,y,z,w)$ só não tem característica 2 no ponto $(0,0,0,0)$ que não pertence a X). Logo, X é um nível regular de F. Conclui-se que X é uma variedade de dimensão $4 - 2 = 2$.

(b) *O espaço tangente a X no ponto $(1,0,1,0)$ é o núcleo de $JF(1,0,1,0)$, enquanto que o espaço normal a X no ponto $(1,0,1,0)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelas linhas de $JF(1,0,1,0)$. Ora,*

$$JF(1,0,1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que o espaço normal é

$$\left(T_{(1,0,1,0)}X\right)^\perp = \{a(1,0,0,0) + b(0,0,1,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,0,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \ .$$

e o espaço tangente (que é o complemento ortogonal do anterior) é

$$T_{(1,0,1,0)}X = \{a(0,1,0,0) + b(0,0,0,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(0,a,0,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \ .$$

□

Exercício [variedade como gráfico]
Seja M a variedade em $\mathbb{R}^3$ dada pelo gráfico da função $f :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin x + \cos y$.

(a) Determine a dimensão de M.
(b) Determine o seu espaço tangente e o seu espaço normal no ponto $(0,0,1)$.

Solução:

(a) *Sendo o gráfico de uma função de classe C^1 definida num intervalo de $\mathbb{R}^2$ e com valores reais, o conjunto M é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.*

(b) *A variedade M é parametrizada por*

$$g :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3 \ , \quad g(x,y) = (x, y, \sin x + \cos y) \ .$$

Esta parametrização tem matriz jacobiana

$$Jg(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cos x & -\sin y \end{bmatrix} \ .$$

O ponto $(0,0,1)$ é a imagem de $(0,0)$ por g. O espaço tangente a M no ponto $(0,0,1)$ é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelas colunas de $Jg(0,0)$, enquanto que o espaço normal a M no ponto $(0,0,1)$ é o núcleo de $Jg(0,0)^t$. Ora,

$$Jg(0,0,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que o espaço tangente é

$$T_{(0,0,1)}M = \{a(1,0,1) + b(0,1,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,b,a) \mid a,b \in \mathbb{R}\} \ ,$$

e o espaço normal (que é o complemento ortogonal do anterior) é

$$\left(T_{(0,0,1)}M\right)^\perp = \{(c,0,-c) \mid c \in \mathbb{R}\} \ .$$

□

Exercício 4.7-2 do Fleming (pág. 159) **[plano tangente a conjunto de nível]**

(a) Mostre que, para $c \neq 0$, o hiperbolóide $x^2 + y^2 - 4z^2 = c$ é uma variedade de dimensão 2. Será que o cone $x^2 + y^2 = 4z^2$ também é uma variedade?
(b) Determine o plano tangente ao hiperbolóide $x^2 + y^2 - 4z^2 = 1$ no ponto $(2, -1, 1)$.

Solução:

(a) *A jacobiana da função* $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 - 4z^2 - c$,

$$Jg(x,y,z) = [2x \quad 2y \quad -8z] \ ,$$

tem característica máxima (i.e., $g'(x,y,z) \neq 0$*) se e só se* $(x,y,z) \neq 0$*. Ora, para* $c \neq 0$*, a origem não pertence ao conjunto* $X = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$*. Conclui-se que, para* $c \neq 0$*,* X *é uma variedade de dimensão 3-1=2.*
O cone (caso $c = 0$*) não é uma variedade de dimensão 2 porque o seu vértice não tem qualquer vizinhança em* $\mathbb{R}^3$ *onde o cone seja o gráfico de uma função continuamente diferenciável.*

(b) *Como o vector com entradas dadas por* $Jg(2,-1,1)$ *para a função* g *da alínea anterior, o chamado gradiente de* g *nesse ponto,*

$$\textit{grad}\, g(2,-1,1) = (4,-2,-8) \ ,$$

gera o espaço normal ao hiperbolóide nesse ponto, a equação do plano tangente (i.e., do plano paralelo ao espaço tangente a $(2,-1,1)$ *passando no ponto* $(2,-1,1)$*) é*

$$((x,y,z) - (2,-1,1)) \cdot (4,-2,-8) = 0 \ ,$$

ou seja,

$$2(x-2) - (y+1) - 4(z-1) = 0 \ .$$

□

Exercício 4.7-3 do Fleming (pág. 159) **[variedade como conjunto de nível]**
Seja $M = \{(x,y,z) : xy = 0, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \neq \pm 1\}$. Mostre que M é uma variedade de dimensão 1 e descreva-a ou esboce-a.

Solução: *Uma vez que* $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $y = 0$*, o conjunto* M *é a união de* $M_1 = \{(0,y,z) : y^2 + z^2 = 1, z \neq \pm 1\}$ *com* $M_2 = \{(x,0,z) : x^2 + z^2 = 1, z \neq \pm 1\}$*.*
M_1 *é uma variedade de dimensão 1 porque é o nível zero da função* $g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g_1(x,y,z) = (x, y^2 + z^2 - 1)$*, cuja jacobiana tem característica máxima sobre* M_1*.*
M_2 *é uma variedade de dimensão 1 porque é o nível zero da função* $g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g_2(x,y,z) = (y, x^2 + z^2 - 1)$*, cuja jacobiana tem característica máxima sobre* M_2*.*
Como $M_1 = M \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \text{plano } xz)$ *e* $M_2 = M \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \text{plano } yz)$ *(onde* $\mathbb{R}^3 \setminus \text{plano } xz$ *e* $\mathbb{R}^3 \setminus \text{plano } yz$ *são abertos) conclui-se que* $M = M_1 \cup M_2$ *é uma variedade de dimensão 1.*
M *é a união da circunferência no plano* yz *de raio 1 e centrada na origem com a circunferência no plano* xz *de raio 1 e centrada na origem, excepto os dois pontos de intersecção.* □

Sobre Extremos Condicionados

Exercício [multiplicadores de Lagrange]
Calcule as distâncias máxima e mínima da origem a pontos da curva

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \ .$$

Solução: *O quadrado da distância à origem é dado pela função* $f(x, y) = x^2 + y^2$. *A equação* $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ *representa uma curva limitada e fechada (uma elipse), ou seja compacta. Como* f *é uma função contínua, a restrição de* f *à curva tem máximo e mínimo. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, se* f *tem um valor extremo num ponto* (x, y) *da curva, então existe um número real* λ *(chamado multiplicador de Lagrange) tal que*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)\right) = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \ . \end{cases}$$

Procura-se então resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + 10\lambda x + 6\lambda y = 0 \\ 2y + 10\lambda y + 6\lambda x = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8 \ . \end{cases}$$

O ponto $(x, y) = (0, 0)$ *não é solução da equação da curva, logo, para haver solução do sistema, a matriz que dá o sistema linear tem que ter determinante nulo:*

$$\det \begin{bmatrix} 1 + 5\lambda & 3\lambda \\ 3\lambda & 1 + 5\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda = -\frac{1}{8} \text{ ou } -\frac{1}{2} \ .$$

Para $\lambda = -\frac{1}{8}$ *obtém-se do sistema linear que* $x - y = 0$, *pelo que a última equação fica (substituindo* $y = x$*)*

$$5x^2 + 6x^2 + 5x^2 = 8 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Para $\lambda = -\frac{1}{2}$ *obtém-se do sistema linear que* $x + y = 0$, *pelo que a última equação fica (substituindo* $y = -x$*)*

$$5x^2 - 6x^2 + 5x^2 = 8 \iff x = \pm\sqrt{2} \ .$$

Os possíveis pontos extremos de f *são pois*

$$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \pm\,(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \ .$$

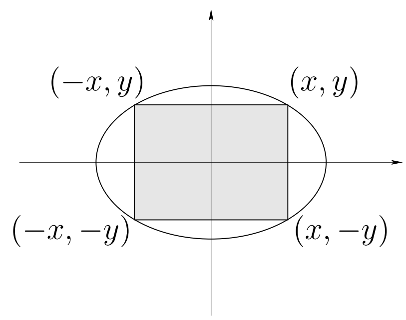
(Alternativamente, das duas equações lineares do sistema obtém-se que

$$\frac{-2x}{10x + 6y} = \lambda = \frac{-2y}{10y + 6x} \Longrightarrow -5xy - 3x^2 = -5xy - 3y^2 \Longrightarrow x = \pm y \ .$$

Substituindo na última equação, obtém-se os quatro candidatos acima.)
Como $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ *e* $f\left(\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})\right) = 4$, *conclui-se que a distância máxima é* $\sqrt{4} = 2$ *e que a distância mínima é* $\sqrt{1} = 1$. □

Exercício [multiplicadores de Lagrange]
Determine o maior valor possível para a área de um rectângulo inscrito na elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ como na figura abaixo.

Sugestão: A área do rectângulo de centro na origem e vértice (x, y) com $x, y \geq 0$ é $f(x, y) = 4xy$.



Solução: *A área do rectângulo de centro na origem e vértice (x, y) com $x, y \geq 0$ é $f(x, y) = 4xy$. Deve-se por isso determinar o máximo da função f sujeita à restrição $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Como f é uma função contínua e a elipse é um conjunto compacto, o problema tem solução (f tem máximo e mínimo na elipse). Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, se f tem valor máximo no ponto (x, y), então*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(4xy + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)\right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(4xy + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)\right) = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \end{cases}$$

Procura-se então resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} 4y + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0 \\ 4x + \lambda\frac{2y}{b^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{a^2} & 4 \\ 4 & \frac{2\lambda}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\ . \end{cases}$$

O ponto $(x, y) = (0, 0)$ não é solução da equação da curva, logo, para haver solução do sistema, a matriz que dá o subsistema linear tem que ter determinante nulo:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{a^2} & 4 \\ 4 & \frac{2\lambda}{b^2} \end{bmatrix} = 0 \iff \frac{4\lambda^2}{a^2b^2} - 16 = 0 \iff \lambda = \pm 2ab\ .$$

Da primeira equação obtém-se então que

$$y = \mp\frac{b}{a}x\ .$$

Substituindo na equação da elipse obtém-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2x^2}{a^2b^2} = 1 \iff x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}a\ .$$

Encontram-se assim quatro pontos candidatos a extremos:

$$\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)\ .$$

Avaliando f em cada um destes quatro pontos, conclui-se que os dois pontos nos quadrantes pares são ponto de mínimo (onde f vale $-2ab$), e os dois pontos nos quadrantes pares são pontos de *máximo, onde f vale $2ab$. Portanto, o maior valor possível para a área de um rectângulo inscrito na elipse dada é $2ab$.* $\square$

Exercício 4.8-1 do Fleming (pág. 165) **[multiplicadores de Lagrange]**
Seja $M = \{(x,y,z) : x+y+z = 1\}$ e $f(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2$. Mostre que f tem um ponto mínimo absoluto sobre M, e ache o valor mínimo de f sobre M.

Solução: *Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, procuram-se os extremos de f sobre M entre os pontos críticos da função*

$$F(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2 + \lambda(x+y+z-1)$$

sobre o conjunto M, onde λ é um número real. Portanto, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 6x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda = 0 \\ x+y+z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{5} \\ z = \frac{3}{5} \\ \lambda = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

O ponto $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ é de facto um mínimo absoluto de f sobre M, porque

$$\begin{array}{rcl} f(x,y,1-x-y) & = & 4x^2 + 4y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 \\ & = & 3(x - \frac{1}{5})^2 + 3(y - \frac{1}{5})^2 + (x + y - \frac{2}{5})^2 + \frac{3}{5} \\ & \geq & \frac{3}{5} = f(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}) \ . \end{array}$$

O valor mínimo de f sobre M é $f(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$. $\square$

Exercício 4.8-3 do Fleming (pág. 165) **[multiplicadores de Lagrange]**
Determine a distância do ponto $(1,-2,-1)$ à recta $\{(x,y,z) : x = y = z\}$.

Solução: *A distância do ponto $(1,-2,-1)$ à recta $\{(x,y,z) : x = y = z\}$ é o mínimo da função "quadrado da distância a $(1,-2,-1)$",*

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2$$

sobre a variedade

$$X = \{(x,y,z) : \underbrace{x-y}_{g(x,y,z)} = 0 \text{ e } \underbrace{y-z}_{h(x,y,z)} = 0\} \ .$$

Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, os extremos de f sobre X encontram-se entre os pontos críticos da função

$$F(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 + \lambda_1(x-y) + \lambda_2(y-z)$$

sobre o conjunto X, onde λ_1 e λ_2 são números reais. Portanto, resolve-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-1) + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y+2) - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z+1) - \lambda_2 = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{2}{3} \\ \lambda_1 = \ldots \\ \lambda_2 = \ldots \end{cases}$$

O ponto $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ é o ponto da recta X mais próximo de $(1,-2,-1)$ e está à distância $\sqrt{f(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})} = \sqrt{\frac{14}{3}}$. $\square$