Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

LEAB, LEB, LEMAT, LEMG, LEN, LEQ, LQ

EXAME 1 / TESTE 2 – 15 DE JANEIRO DE 2003

apresente e justifique todos os cálculos

2º teste: questões no verso (4, 5 e 6), duração: **1.5 horas** (17h-18h30)

1º exame: todas as questões (1 a 6), duração: **3 horas** (17h-20h)

cotação: 2 valores por alínea (4 valores no caso do teste)

(1) Considere o sólido

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y > 0\ ,\ x^2 + y^2 < z < 2 - x^2 - y^2\}\ .$$

(a) Calcule o volume de V.

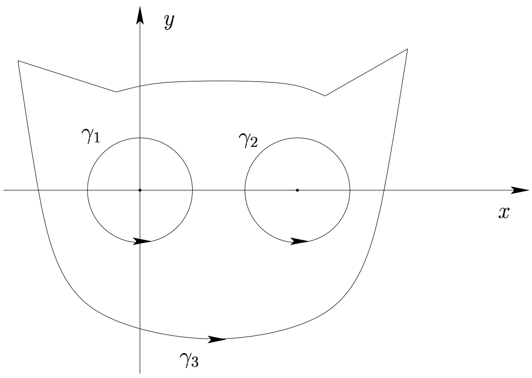
(b) Escreva uma expressão para $\iiint_V f$ da forma

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} \left(\int_{\cdots}^{\cdots} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx\ .$$

(2) Calcule o integral

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{\sqrt{4-4y^2}} 2e^{x^2+4y^2}\ dx\, dy\ .$$

(3) Sejam γ_1 e γ_2 duas circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e γ_3 uma curva simples fechada como na seguinte figura:



Seja ainda $F(x,y) = \left(-\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} \right)$ um campo vectorial em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcule os integrais de linha:

(a) $\oint_{\gamma_1} F \cdot dg_1$;

(b) $\oint_{\gamma_2} F \cdot dg_2$ e $\oint_{\gamma_3} F \cdot dg_3$.

(continua)

início do 2º teste

(4) Considere o conjunto

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 + xy\} \ .$$

(a) Mostre que M é uma superfície (variedade de dimensão 2).
(b) Determine a distância de M à origem.

(5) Considere a variedade

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2 \ , \ y > 0 \ , \ z > 0\} \ ,$$

e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$F(x,y,z) = (2x, -y, 1-z) \ .$$

Calcule o fluxo $\int_S F \cdot \nu$ segundo a direcção da normal unitária ν cuja terceira componente é positiva, usando:
(a) a definição de fluxo;
(b) o teorema de Stokes.

(6) Mostre que a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \ , & \text{se } \ x, y \in \mathbb{Q} \\ \frac{|y|\, x^2}{(x^2+y^2)^2(1+x^2+y^2)} \ , & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é integrável em $\mathbb{R}^2$ e calcule o seu integral.

Revisão de provas: 4ª feira, 22 de Janeiro, 16h-17h, sala P12

Respostas sumárias:

(1) (a) O sólido V é constituído pelos pontos acima do parabolóide standard $z = x^2 + y^2$, abaixo do parabolóide invertido $z = 2 - x^2 - y^2$, e com coordenada x positiva. Os dois parabolóides intersectam-se na circunferência dada por $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 1$. A projecção de V no plano xy é o semidisco dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ e $y > 0$. Como se trata de metade de um sólido de revolução, usa-se coordenadas cilíndricas usuais para calcular o seu volume.

$$\begin{aligned}\text{Volume } (V) = \iiint_V 1 \quad &= \int_0^{\pi}\int_0^1\int_{\rho^2}^{2-\rho^2} \rho \; dz\, d\rho\, d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \left(2 - 2\rho^2\right) \rho \; d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \; .\end{aligned}$$

(b) Como a projecção de V no plano xy é o semidisco $x^2 + y^2 \leq 1$, $y > 0$, o integral pedido é

$$\iiint_V f = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx \; .$$

(2) A região de integração é o disco elíptico $x^2 + 4y^2 \leq 4$. Utilizando uma mudança para coordenadas polares elípticas $x = r\cos\theta$, $2y = r\sin\theta$ cujo jacobiano é $\frac{1}{2}r$ vem

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 2e^{r^2}\cdot\frac{1}{2}r \; dr\right) d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^2 = \pi(e^4 - 1) \; .$$

(3) (a) Seja $g_1(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, uma parametrização de γ_1. Como $g_1'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, pela definição de integral de linha de um campo vectorial tem-se

$$\begin{aligned}\oint_{\gamma_1} F\cdot dg_1 \quad &= \int_0^{2\pi} F(g_1(\theta))\cdot g_1'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos^2\theta\sin\theta, \cos^3\theta)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \;=\; \pi \; .\end{aligned}$$

(b) Verifica-se que o campo F é fechado:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \; .$$

Uma vez que F não tem quaisquer singularidades no interior de γ_2, conclui-se, pelo teorema de Green por exemplo, que $\oint_{\gamma_2} F\cdot dg_2 = 0$.
Ainda pelo teorema de Green e sabendo que F é um campo fechado, deduz-se que, com os sentidos indicados na figura,

$$\oint_{\gamma_3} F\cdot dg_3 = \oint_{\gamma_1} F\cdot dg_1 + \oint_{\gamma_2} F\cdot dg_2 = \pi + 0 = \pi \; .$$

Continuação das respostas sumárias:

(4) (a) O conjunto M é o nível zero da função de classe C^1, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 1 + xy - z$. Como a jacobiana $Df(x,y,z) = [y \;\; x \;\; -1]$ nunca se anula, o nível M é regular, pelo que M é uma variedade de dimensão 3-1=2.

(b) Vai-se primeiro determinar o ponto de M mais próximo da origem, utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange. Seja $d^2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ a função quadrado da distância do ponto (x,y,z) à origem. A jacobiana de d^2 em (x,y,z) é a matriz $[2x \;\; 2y \;\; 2z]$. Se (x,y,z) é um mínimo da função d^2 restrita a M, então existe um número real λ (dito multiplicador de Lagrange) tal que

$$\begin{cases} D(d^2 + \lambda f)(x,y,z) = (0,0,0) \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} (2x, 2y, 2z) = -\lambda(y, x, -1) \\ 1 + xy = z\ . \end{cases}$$

Uma vez que $\lambda = 0$ não é solução do sistema (pois implicaria que $x = y = z = 0$, o que não verifica a última equação), pode-se deduzir com $\lambda \neq 0$ que a única solução é $x = y = 0$, $z = 1$, $\lambda = -2$. Esta solução é necessariamente um ponto de mínimo. Conclui-se que a distância de M à origem é igual a $d(0,0,1) = 1$.

(5) (a) A variedade S é uma porção de um parabolóide invertido limitada pelos planos $y = 0$ e $z = 0$. Considere-se a parametrização de S dada por $g(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 1 - \rho^2)$, com $\rho \in]0,1[$ e $\theta \in]0,\pi[$. O vector

$$D_\rho g \times D_\theta g = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos\theta & \sin\theta & -2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{bmatrix} = (2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho)$$

tem o sentido da normal pretendida, com a terceira componente positiva. O fluxo pedido é

$$\int_0^\pi \int_0^1 F(g(\rho,\theta)) \cdot (D_\rho g \times D_\theta g)\; d\rho\, d\theta = \int_0^\pi \int_0^1 \left(6\rho^3\cos^2\theta - \rho^3\right)\; d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{2}\ .$$

(b) Começa-se por procurar campo vectorial H (dito potencial vector) tal que $\mathrm{rot} H = F$:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} & = & F_1 & = & 2x \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} & = & F_2 & = & -y \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} & = & F_3 & = & 1 - z\ . \end{cases}$$

Escolhendo $H_3 = 0$, obtém-se das duas primeiras equações que $H_1 = -yz + \alpha(x,y)$, $H_2 = -2xz + \beta(x,y)$. A terceira equação fica então $-2z + \frac{\partial x}{\partial \beta} + z - \frac{\partial y}{\partial \alpha} = 1 - z$ e pode ser resolvida tomando por exemplo $\alpha = 0$, $\beta = x$. Encontra-se assim o potencial vector $H(x,y,z) = (-yz, -2xz + x, 0)$. Seja C a semi-circunferência horizontal no plano $z = 0$ de raio 1, centrada na origem, com $y > 0$ parametrizada por $g(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, $\theta \in [0,\pi]$. Seja $\widetilde{C}$ o arco de parábola parametrizado por $\widetilde{g}(x) = (x, 0, 1 - x^2)$, com $x \in [-1,1]$. Pelo teorema de Stokes, o fluxo pedido é

$$\begin{aligned} \textstyle\iint_S F \cdot n = \iint_S \mathrm{rot} H \cdot n &= \textstyle\oint_C H \cdot dg + \oint_{\widetilde{C}} H \cdot d\widetilde{g} \\ &= \textstyle\int_0^\pi (0, \cos\theta, 0) \cdot (\sin\theta, \cos\theta, 0)\; d\theta + \int_{-1}^1 0\; dx \\ &= \textstyle\int_0^\pi \cos^2\theta\; d\theta \;=\; \frac{\pi}{2}\ , \end{aligned}$$

onde a contribuição de $\widetilde{C}$ é nula por ortogonalidade do campo H com a velocidade $\widetilde{g}'$ sobre $\widetilde{C}$.

(6) O conjunto dos racionais tem medida nula. Consequentemente, f é igual quase em toda a parte à função $g(x,y) = |y|\, x^2/(x^2+y^2)^2(1 + x^2 + y^2)$, e será integrável se e só se g o for. Para $k = 1, 2, \dots$ seja

$$g_k(x,y) = \begin{cases} g(x,y)\ , & \text{se } \; 1/k^2 \le x^2 + y^2 \le k^2 \\ 0\ , & \text{caso contrário}\ . \end{cases}$$

As funções g_k são integráveis em $\mathbb{R}^2$ porque são contínuas nas coroas circulares compactas de raio interior $1/k$ e de raio exterior k, e $g_k = 0$ zero fora delas. A sucessão $\{g_k\}$ é monótona crescente porque g é positiva. Tem-se,

$$\int_{\mathbb{R}^2} g_k = \int_0^{2\pi} \int_{1/k}^k \frac{r^3\cos^2\theta |\sin\theta|}{r^4(1+r^2)} \cdot r\; dr\, d\theta = \frac{4}{3}\left(\arctan k - \arctan\frac{1}{k}\right) \le \frac{4}{3}\pi\ .$$

Portanto, a sucessão dos integrais $\{\int_{\mathbb{R}^2} g_k\}$ é majorada, e observando que $\lim_{k\to\infty} g_k(x,y) = g(x,y)$ para todo o (x,y), o teorema da convergência monótona garante que g, e consequentemente f, é integrável em $\mathbb{R}^2$ com

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2} g = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} g_k = \lim_{k\to\infty} \frac{4}{3}(\arctan(k) - \arctan(1/k)) = \frac{2\pi}{3}\ .$$