Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/Dez/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 PARA PRATICAR – DEZEMBRO DE 2003

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

Resolução: *Os valores próprios de A são as soluções de*
$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \lambda^2 + 4 = 0 \iff \lambda = \pm 2i \ .$$
Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $2i$ são os vectores não nulos de
$$\mathrm{Ker}\ (A - 2i\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\ \begin{bmatrix} -2i & 4 \\ -1 & -2i \end{bmatrix} = \mathcal{L} \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix} \ .$$
Os vectores próprios de A associados ao valor próprio $\overline{\lambda} = -2i$ são os vectores complexos conjugados dos vectores próprios associados ao valor próprio $\lambda = 2i$. □

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização.

Resolução: *Como A é uma matriz 2×2 e admite dois vectores próprios l.i., por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ i \end{bmatrix}$ e $\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \end{bmatrix}$, conclui-se que é diagonalizável. Uma diagonalização para A é*
$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \ .$$
□

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

Resolução: *Os valores próprios de B são as soluções de*

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff \ldots \iff -(\lambda-1)^3 = 0 \iff \lambda = 1 \,,$$

onde o determinante foi calculado pela fórmula de Laplace ao longo da 1ª linha e uma raiz 1 é adivinhada. Os vectores próprios de B são os vectores não nulos de $\mathrm{Ker}\ (B - \mathrm{Id})$*:*

$$\mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

onde se aplicou eliminação de Gauss. Logo são os vectores da forma $\begin{bmatrix} a+b \\ a \\ b \end{bmatrix}$ *com* $a, b \in \mathbb{R}$.

□

(b) Escreva uma forma canónica de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$).

Resolução: *Não havendo três, mas apenas dois, vectores próprios l.i., uma forma canónica de Jordan para B será*

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ou a forma com os dois blocos de Jordan trocados).

Comentário: *Se fosse pedida uma decomposição de Jordan, havia que encontrar um vector próprio generalizado. Por exemplo, $v_1 = (1, -1, 2)^t$ é um vector próprio pertencente ao espaço das colunas de $B - \mathrm{Id}$, $w = (1, 0, 0)^t$ é um correspondente vector próprio generalizado porque $(B - \mathrm{Id})w = v_1$ e $v_2 = (1, 1, 0)^t$ é um outro vector próprio independente de v_1. Uma matriz de mudança de base S correspondente à forma canónica J seria a matriz cujas colunas são v_1, w e v_2 por esta ordem.* □

(3) (a) Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde a, b e c são constantes arbitrárias. Como é que a multiplicidade geométrica do valor próprio 1 depende das constantes a, b e c? Quando é que há uma base própria de C?

Resolução: *A multiplicidade geométrica de 1 é a dimensão de*

$$E_1 = \mathrm{Ker}\ (C - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

A multiplicidade geométrica é 3 quando $a = b = c = 0$. A multiplicidade geométrica é 2 quando só um de entre a e c for zero, ou quando $a = c = 0$ mas $b \neq 0$ (porque então a matriz tem característica 1). A multiplicidade geométrica é 1 quando $a \neq 0$ e $c \neq 0$ (porque então $C - \mathrm{Id}$ tem característica 2). □

(b) Suponha que uma certa matriz 4×4 tem exactamente dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2. O que é que podem ser as multiplicidades algébricas e geométricas destes valores próprios? Dê um exemplo que uma matriz em cada caso.

Resolução: *A multiplicidade algébrica (m.a.) de λ_1 e de λ_2 pode ser qualquer entre 1 e 3 desde que a soma dê 4 (que é o grau do polinómio característico). A multiplicidade geométrica (m.g.) de cada valor próprio está entre 1 e a multiplicidade algébrica desse valor próprio. Portanto as 10 possibilidades são:*

m.a. (λ_1)	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*2*	*2*	*3*	*3*	*3*
m.g. (λ_1)	*1*	*1*	*1*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*2*	*3*
m.a. (λ_2)	*3*	*3*	*3*	*2*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*
m.g. (λ_2)	*3*	*2*	*1*	*1*	*2*	*1*	*2*	*1*	*1*	*1*

onde as últimas quatro repetem as primeiras quatro trocando os papéis de λ_1 e λ_2. Exemplos para as seis primeiras são:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 1 & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & 1 & \\ & & \lambda_2 & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & 1 \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

□

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se o quadrado A^2 de uma matriz $n \times n$ tem núcleo não trivial, então 0 é uma valor próprio da matriz A.

Verdadeira $\boxed{\text{X}}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Se o quadrado* A^2 *de uma matriz* $n \times n$ *tem* $\mathrm{Ker}\ (A^2) \neq \{0\}$, *então a matriz* A *também tem que ter núcleo não trivial, porque se* A *fosse invertível, então* A^2 *também seria invertível. Os vectores não nulos no núcleo são vectores próprios associados ao valor* 0, *logo* 0 *é valor próprio de uma matriz* A *com* $\mathrm{Ker}\ A \neq \{0\}$. □

(b) Se v e w são vectores próprios de uma matriz A linearmente independentes, então $v + w$ também é um vector próprio de A.

Verdadeira $\boxed{}$ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Por exemplo,* $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *e* $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, *são vectores próprios l.i. da matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ *associados aos valores próprios* 2 *e* 3 *respectivamente, mas o vector* $v+w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *não é vector próprio de* A *pois* $A(v+w) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *não é múltiplo escalar de* $v + w$. □

(c) Se duas matrizes A e B têm o mesmo polinómio característico, então essas matrizes são semelhantes.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo,* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *têm ambas polinómio característico* $p_A(\lambda) = p_B(\lambda) = \lambda^2$*, mas não são matrizes semelhantes (a matriz nula só é semelhante a si mesma).* $\square$

(d) Qualquer matriz quadrada tem os mesmos vectores próprios da sua transposta.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo,* $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *é vector próprio de* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *(para o valor próprio* 0*), mas não é vector próprio de* $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *pois* $A^t v$ *não é múltiplo escalar de* v*.* $\square$

(e) Se uma matriz A é diagonalizável, então a multiplicidade geométrica de cada valor próprio λ de A tem que ser igual à multiplicidade algébrica de λ.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Se uma matriz* $n \times n$ A *é diagonalizável, então a soma das multiplicidades geométricas dos valores próprios tem que ser igual a* n *para que haja uma base de vectores próprios. A multiplicidade geométrica de um valor próprio é sempre menor ou igual à sua multiplicidade algébrica. A soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios é sempre igual a* n *(ou menor se se considerarem apenas valores próprios reais). Conclui-se que, se* A *é diagonalizável, então a multiplicidade geométrica de cada valor próprio tem que ser igual à respectiva multiplicidade algébrica.* $\square$