Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 PARA PRATICAR – DEZEMBRO DE 2003

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização.

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

(b) Escreva uma forma canónica de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$).

(3) (a) Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde a, b e c são constantes arbitrárias. Como é que a multiplicidade geométrica do valor próprio 1 depende das constantes a, b e c? Quando é que há uma base própria de C?

(b) Suponha que uma certa matriz 4×4 tem exactamente dois valores próprios distintos λ_1 e λ_2. O que é que podem ser as multiplicidades algébricas e geométricas destes valores próprios? Dê um exemplo que uma matriz em cada caso.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se o quadrado A^2 de uma matriz $n \times n$ tem núcleo não trivial, então 0 é uma valor próprio da matriz A.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Se v e w são vectores próprios de uma matriz A linearmente independentes, então $v + w$ também é um vector próprio de A.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Se duas matrizes A e B têm o mesmo polinómio característico, então essas matrizes são semelhantes.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Qualquer matriz quadrada tem os mesmos vectores próprios da sua transposta.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se uma matriz A é diagonalizável, então a multiplicidade geométrica de cada valor próprio λ de A tem que ser igual à multiplicidade algébrica de λ.

Verdadeira ☐ Falsa ☐