Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 – 9 DE DEZEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: __________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização, i.e., escreva A na forma SDS^{-1} onde D é uma matriz diagonal e S é uma matriz de mudança de base.

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

(b) Escreva uma decomposição de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$), i.e., escreva B na forma SJS^{-1} onde J é uma forma canónica de Jordan e S é uma matriz de mudança de base.

(3) Para um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores próprios (eventualmente complexos) de C em função de k.

(b) Para que valores de k é que a matriz C é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$)?

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Os valores próprios de uma matriz diagonal são as suas entradas da diagonal principal.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Se uma matriz A é diagonalizável, então $(A^t)^2$ é diagonalizável.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Qualquer matriz invertível é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$).

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se a característica de uma matriz $n \times n$ é estritamente menor do que n, então 0 é um valor próprio dessa matriz.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se A e B são matrizes $n \times n$ diagonalizáveis sobre $\mathbb{R}$ que comutam, então existe uma base de $\mathbb{R}^n$ constituída por vectores próprios de A e B simultaneamente.

Verdadeira ☐ Falsa ☐