Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 4 – 9 DE DEZEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 3ª feira, 16 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº: ____________

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de A.

(b) Decida se A é diagonalizável (eventualmente sobre $\mathbb{C}$) e em caso afirmativo escreva uma diagonalização, i.e., escreva A na forma SDS^{-1} onde D é uma matriz diagonal e S é uma matriz de mudança de base.

(2) Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores e os vectores próprios (eventualmente complexos) de B.

(b) Escreva uma decomposição de Jordan para B (eventualmente sobre $\mathbb{C}$), i.e., escreva B na forma SJS^{-1} onde J é uma forma canónica de Jordan e S é uma matriz de mudança de base.

(3) Para um parâmetro $k \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ k & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule os valores próprios (eventualmente complexos) de C em função de k.

(b) Para que valores de k é que a matriz C é diagonalizável (sobre $\mathbb{C}$)?

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz 3×3 admite três vectores próprios linearmente independentes, então essa matriz é semelhante a uma matriz diagonal.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Se uma matriz 3×3 A é diagonalizável, então a matriz $A - 3\mathrm{Id}$ também é diagonalizável.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Os valores próprios de uma matriz 2×2 A são as soluções da equação $\lambda^2 - (\mathrm{tr} A)\lambda + (\det A) = 0$.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(d) Se v é um vector próprio de uma matriz A, então v está no núcleo ou na imagem de A.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(e) Para quaisquer matrizes $n \times n$, A e B, as matrizes produto AB e BA têm os mesmos valores próprios.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$