Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 3 – 25 DE NOVEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada uma das alíneas dos problemas (1) e (3) vale 1 ponto, e cada uma das alíneas do problema (2) vale 2.5 pontos.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)(a)	
(1)(b)	
(1)(c)	
(1)(d)	
(1)(e)	
(2)(a)	
(2)(b)	
(2)(c)	
(2)(d)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(3)(c)	
(3)(d)	
(3)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Considere uma matriz 4×4 A com linhas w_1, w_2, w_3 e w_4 e com $\det A = 5$. Ache os determinantes das seguintes matrizes, apresentando apenas breves justificações.

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_1 + w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\mathsf{a}) = \det A = 5$

porque somar uma linha a outra linha da matriz não afecta o determinante.

(b) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & 3w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & -w_4 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\mathsf{b}) = 3 \times (-1) \times \det A = -15$

porque sempre que se multiplica uma linha de uma matriz por uma constante o determinante é multiplicado por essa constante.

(c) $\begin{bmatrix} - & w_1 + w_2 & - \\ - & w_2 + w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\mathsf{c}) = \det \begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 & - \end{bmatrix} = -\det A = -5$

porque somar uma linha a outras linhas da matriz não afecta o determinante e trocar duas linhas troca o sinal do determinante.

(d) $\begin{bmatrix} - & w_1 + 3w_4 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 + \frac{1}{3}w_1 & - \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\mathsf{d}) = 0$

porque a primeira linha da matriz é três vezes a quarta, pelo que são dependentes e a matriz não é invertível.

(e) $\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_2 & w_3 & w_1 & w_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$ $\qquad \det(\mathsf{e}) = -\begin{bmatrix} | & | & | & | \\ w_1 & w_3 & w_2 & w_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \det A^t = 5$

porque sempre que se troca duas colunas o determinante troca de sinal e o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta.

(2) Em $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual considere os vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \text{e} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Seja $V = \mathcal{L}(v_1, v_2)$ o subespaço gerado pelos dois primeiros vectores.

(a) Ache uma base ortonormal para V.

Resolução: *Pelo processo de Gram-Schmidt: como* $|v_1| = \sqrt{4+4+1} = 3$, $v_1 \cdot v_2 = 0$ *e* $|v_2| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$,

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma base o.n. de V.

Comentário: *Alternativamente, observando logo que* v_1 *e* v_2 *são ortogonais, bastaria tomar* $w_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$ *e* $w_2 = \frac{v_2}{|v_2|}$, *sem sequer referir o processo de Gram-Schmidt.* □

(b) Determine a projecção ortogonal de v_3 no subespaço V.

Resolução: *Tem-se a fórmula para a projecção ortogonal*

$$\text{proj}_V v_3 = (v_3 \cdot w_1) w_1 + (v_3 \cdot w_2) w_2$$

onde w_1 *e* w_2 *formam uma base o.n. de* V. *Como, relativamente à base encontrada na alínea anterior, tem-se* $v_3 \cdot w_1 = \frac{2}{3}$ *e* $v_3 \cdot w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, *conclui-se que*

$$\text{proj}_V v_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{18} \\ \frac{-1}{18} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} .$$

□

(c) Calcule o volume do paralelepípedo definido por v_1, v_2 e v_3.

Resolução: *O volume do paralelepípedo definido por v_1, v_2 e v_3 é igual ao módulo do determinante da matriz cujas colunas são v_1, v_2 e v_3. Uma vez que, pela regra de Laplace ao longo da terceira coluna,*

$$\det\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\times\det\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1\,,$$

conclui-se que o volume pedido é 1. $\square$

(d) Ache uma base para o complemento ortogonal $V^\perp$.

Resolução: *O complemento ortogonal $V^\perp$ é o núcleo da matriz cujas linhas são os vectores v_1 e v_2 que geram V. Pelo método de eliminação de Gauss,*

$$\mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\,,$$

pelo que, por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ forma uma base de $V^\perp$. $\square$

(3) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 100 & 1 & 1 \\ 100 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & 1 & 100 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível.

Verdadeira $\boxed{\text{X}}$ Falsa $\boxed{}$

Resolução: *Pela definição de determinante,* $\det A$ *é dado por* 100^4 *somado com* $4! - 1 = 23$ *contribuições, cada uma em módulo inferior ou igual a* 100^2*. Como* $100^4 > 23 \times 100^2$*, o determinante de* A *não é zero.* □

(b) Há matrizes 3×3 invertíveis A e S com $S^t AS = -A$.

Verdadeira $\boxed{}$ Falsa $\boxed{\text{X}}$

Resolução: *Se fosse* $S^t AS = -A$*, seria* $(\det S^t)(\det A)(\det S) = \det(-A)$*, ou seja,* $(\det S)^2 \det A = -\det A$*, porque* $\det = \det S^t$ *e para matrizes* 3×3 *tem-se* $\det(-A) = -\det A$*. Ora é impossível para números reais não nulos ter-se* $x^2 y = -y$ *ou seja* $x^2 = -1$*.* □

(c) Uma matriz que se obtém da matriz identidade trocando um número arbitrário de linhas e colunas é uma matriz ortogonal.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *A identidade é uma matriz ortogonal, pelo que as suas colunas são o.n. e as suas linhas também são o.n. Trocar linhas ou colunas preserva a ortonormalidade de linhas e colunas. Logo obtém-se uma matriz ortogonal.* □

(d) Se v é um vector próprio de A e B, então v é um vector próprio de AB.

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Se $Av = \alpha v$ e $Bv = \beta v$ para certos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $(AB)v = A(Bv) = A(\beta v) = \beta Av = \alpha\beta v$, pelo que v é vector próprio de AB associado ao valor próprio $\alpha\beta$.* □

(e) Se A é uma matriz 4×4 cujas entradas são todas 1 ou -1, então o determinante de A é divisível por 8 (i.e., $\det A = 8k$ para algum inteiro k).

Verdadeira [X] Falsa [ ]

Resolução: *Eventualmente multiplicando linhas e colunas de A por 1 ou -1, basta considerar o caso em que a primeira linha e a primeira coluna de A só têm 1's. Subtraindo a primeira linha às restantes obtém-se uma matriz em que a primeira coluna é $(1, 0, 0, 0)$ e as entradas do menor A_{11} são todas 0 ou -2, pelo que o determinante desse menor (sendo uma matriz 3×3) é múltiplo de $2^3 = 8$. O resultado segue então da fórmula de Laplace ao longo da primeira coluna.* □