Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2003

Duração: 50 minutos

o aspecto do resto desta página e a estrutura das perguntas coincidem com os do teste real

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} .$$

(2) Considere a transformação linear no espaço das matrizes reais 2×2

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{2\times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X \end{array}$$

que leva uma matriz X para a matriz produto MX onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Determine a matriz que representa T relativamente à base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) No espaço de todos os polinómios reais de variável real considere os elementos $p_1(x) = 1 + x - 2x^2 + x^3$, $p_2(x) = x^2 - x^3$ e $p_3(x) = 1 + x - 2x^2 + 3x^3$.

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ gerado por estes três polinómios e indique a dimensão de V.

(b) Mostre que o conjunto $W = \{p \in V : p(0) = p(1)\}$ forma um subespaço de V e determine uma base de W.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz 2×2 tem característica 2, então as suas entradas da diagonal são não-nulas.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(b) Se as colunas de uma matriz quadrada formam uma base, então as linhas dessa matriz também formam uma base.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(c) Se uma matriz quadrada A satisfaz $A^{100} = 0$, então a dimensão do seu núcleo é pelo menos 1.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Duas matrizes semelhantes têm a mesma característica.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se o núcleo de uma matriz A com dimensão 5×4 consiste apenas no vector zero, e se $AB = AC$ para duas matrizes B e C de dimensão 4×5, então essas matrizes B e C têm que ser iguais.

Verdadeira ☐ Falsa ☐