Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 4 DE NOVEMBRO DE 2003 – 8:10-9H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº: _____

Curso: _____

Nome: _____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} .$$

(2) Considere a transformação linear no espaço das matrizes reais 2×2

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{M}_{2\times 2} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ & X & \mapsto & X\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

que leva uma matriz X para a matriz produto XM onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.
Determine a matriz que representa T relativamente à base ordenada de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Em $\mathbb{R}^3$ considere os elementos

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \text{e} \ v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ .$$

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ gerado por estes três vectores e indique a dimensão de V.

(b) Determine uma base do subespaço $W = \{v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in V : a + b + c = 0\}$.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Se uma matriz $n \times n$ tem um núcleo n-dimensional, então todas as entradas dessa matriz são nulas.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Existe uma transformação linear sobrejectiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma matriz 3×3 com característica 1 tal que $A^2 = 0$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Se $A^2 = 0$ para uma matriz 10×10, então a característica de A é no máximo igual a 5.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se A e B são matrizes invertíveis $n \times n$, então AB é semelhante a BA.

Verdadeira ☐ Falsa ☐