Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 2 – 4 DE NOVEMBRO DE 2003 – 11:10-12H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos, sendo a cotação igualmente repartida pelas alíneas de cada problema.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 13 de Novembro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)(a)	
(3)(b)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº: _____

Curso: _____

Nome: _____

(1) Forneça bases para o núcleo e para o espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(2) Considere a transformação linear

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & \mapsto & \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determine a matriz que representa T relativamente às bases ordenadas

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ de } \mathbb{R}^4 .$$

(3) No espaço dos polinómios reais de variável real de grau menor ou igual a 2, considere os elementos $p_1(x) = x + x^2$, $p_2(x) = 3x^2$ e $p_3(x) = x - x^2$.

(a) Determine uma base do subespaço $V = \mathcal{L}(p_1, p_2, p_3)$ gerado por estes três polinómios e indique a dimensão de V.

(b) Determine uma base para o subespaço $W = \{p \in V : p'(0) = p(0) = 0\}$.

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) O plano definido por $x - y - z = 1$ é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(b) Existe uma transformação linear injectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sempre múltiplo do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(c) Há uma matriz invertível $n \times n$ cuja inversa tem característica $n - 1$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Para uma qualquer matriz quadrada que satisfaça $A^2 = A$, a imagem e o núcleo de A só podem ter o vector nulo em comum.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) O núcleo de duas transformações lineares semelhantes é o mesmo.

Verdadeira ☐ Falsa ☐