Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 1 – 18 DE NOVEMBRO DE 2003 – 16:10-17H

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos. A cotação do problema (4) é igualmente repartida pelas suas alíneas.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 4 de Dezembro, 16h-17h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________________

Nome: ____

(1) Determine a solução geral do sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ & x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

(2) Calcule o núcleo e a imagem da transformação linear

$$T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \qquad T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3z - w \\ 0 \end{bmatrix} .$$

(3) Para que escolhas do parâmetro α é que a seguinte matriz é invertível?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) A fórmula $AB = BA$ é válida para quaisquer matrizes $n \times n$ A e B.

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(b) Há um inteiro positivo n para o qual $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \mathrm{Id}.$

Verdadeira $\square$ Falsa $\square$

(c) Se A e B são duas matrizes 4×3 tais que $Av = Bv$ para todos os vectores em $\mathbb{R}^3$, então as matrizes A e B têm que ser iguais.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(d) Há uma matriz 2×2 invertível A com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Verdadeira ☐ Falsa ☐

(e) Se uma matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é invertível, então $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ também é invertível.

Verdadeira ☐ Falsa ☐