Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 3/Dez/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

REVISÃO DA PARTE IV

Parte IV - Diagonalização

Conceitos:
valor próprio, vector próprio, **espaço próprio**, subespaço invariante, base própria, multiplicidade algébrica, multiplicidade geométrica, **matriz diagonalizável**, valor e vector próprio complexo, base própria complexa, vector próprio generalizado, bloco de Jordan, **forma canónica de Jordan**, decomposição de Jordan

Dada uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ com entradas reais:

Um vector não-nulo $v \in \mathbb{R}^n$, diz-se um **vector próprio** de A quando Av é múltiplo escalar de v, i.e., quando $\boxed{Av = \lambda v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nesse caso, λ diz-se o **valor próprio** de A associado ao vector próprio v.
O **espaço próprio** de A associado ao valor próprio λ é $\boxed{E_\lambda = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda \mathrm{Id})}$.
Uma **base própria** de A é uma base de $\mathbb{R}^n$ constituída por vectores próprios de A.

Um subespaço vectorial $E \subseteq \mathbb{R}^n$ é um **subespaço invariante** para A se $v \in E \Longrightarrow Av \in E$.
Por exemplo, $\mathrm{Ker}\ A$, $\mathrm{Im}\ A$, $\mathbb{R}^n$, $\{0\}$ e os espaços próprios de A são subespaços invariantes para A.

Seja λ_0 um valor próprio de A.
A **multiplicidade algébrica** de λ_0 é a multiplicidade de λ_0 como raiz do polinómio característico $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id})$.
A **multiplicidade geométrica** de λ_0 é a dimensão do respectivo espaço próprio $E_\lambda = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda \mathrm{Id})$.
A multiplicidade geométrica de λ_0 é sempre menor ou igual à multiplicidade algébrica de λ_0.

Factos:

- **Vectores próprios associados a valores próprios distintos são l.i.**
  Porquê?
  Suponha-se que $v_1, \ldots, v_m$ são vectores próprios associados aos valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distintos, e suponha-se que $c_1 v_1 + \ldots + c_m v_m = 0$. Aplique-se a matriz $(A - \lambda_2 \mathrm{Id})(A - \lambda_3 \mathrm{Id}) \ldots (A - \lambda_m \mathrm{Id})$ a ambos os membros desta equação para concluir que tem que ser $c_1 = 0$. Analogamente mostra-se que $c_2 = 0$, ..., $c_m = 0$.
  Consequências:
- Se A tem n valores próprios distintos, então há uma base própria de A.
  Porquê? Para essa base própria escolha-se um vector próprio de A correspondente a cada valor próprio.
- Se as multiplicidades geométricas dos valores próprios de A somam n, então há uma base própria de A.
  Porquê? Para essa base própria escolha-se uma base de cada espaço próprio de A.

Matrizes semelhantes: Suponha-se que A e B são matrizes semelhantes, i.e., que existe uma matriz invertível S tal que $B = S^{-1}AS$. Então

- as características são iguais
  $$\boxed{\mathrm{car} A = \mathrm{car} B} \;;$$
- as nulidades são iguais
  $$\boxed{\mathrm{nul} A = \mathrm{nul} B} \;;$$
- os polinómios característicos são iguais
  $$\boxed{p_A(\lambda) = p_B(\lambda)} \;;$$
- os determinantes são iguais
  $$\boxed{\det A = \det B} \;;$$
- os traços são iguais
  $$\boxed{\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B} \;;$$
- os valores próprios são os mesmos e com as mesmas multiplicidades algébricas e geométricas;
- os vectores próprios *correspondem-se mas não são necessariamente os mesmos*:
  se v é vector próprio de B associado ao valor próprio λ, então Sv é vector próprio de A associado ao valor próprio λ.

A matriz A diz-se **diagonalizável** quando A é semelhante a uma matriz diagonal.

A matriz A é diagonalizável sse há uma base própria de A.
Porquê?
Suponha-se que $v_1, \ldots, v_n$ é uma base própria de A e que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os respectivos valores próprios associados, i.e., $Av_j = \lambda_j v_j$ (os λ_j's podem ser repetidos). Então $\boxed{S^{-1}AS = D}$ onde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} .$$

Diagonalizar uma matriz:
verificar se a matriz A é diagonalizável e, se for, encontrar uma matriz de mudança de base S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal. As etapas são as seguintes:

(1) Achar os valores próprios de A, i.e., achar as raízes do polinómio característico
$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) .$$
(2) Para cada valor próprio λ_j, achar uma base do seu espaço próprio
$$E_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}\ (A - \lambda_j \mathrm{Id}) .$$
(3) A matriz A é diagonalizável sse as dimensões dos espaços próprios E_{λ_j}'s somam n. Nesse caso, obtém-se uma base própria $v_1, \ldots, v_n$ de A coleccionando bases dos E_{λ_j}'s e $S^{-1}AS$ é diagonal onde S é a matriz cujas colunas são os v_j's.

O problema da existência de valores próprios leva a trabalhar com *números complexos*.
O problema da existência de vectores próprios leva a trabalhar com *forma canónica de Jordan*.

Teorema fundamental da Álgebra (Gauss, 1799):
Qualquer polinómio $p(x)$ de grau n e com coeficientes complexos é da forma
$$p(x) = k(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_n)$$
para certas constantes $k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ($k \neq 0$).
I.e., a soma das multiplicidades algébricas das raízes de um polinómio de grau n é n.
Ou seja, qualquer polinómio não constante tem raízes em $\mathbb{C}$.
Em particular, *qualquer matriz tem valores próprios em* $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$ é um **espaço vectorial complexo** de dimensão n:
o produto por escalares complexos

$$\lambda(z_1, \ldots, z_n) = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) \ , \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

e a adição de vectores de $\mathbb{C}^n$

$$(z_1, \ldots, z_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (z_1 + w_1, \ldots, z_n + w_n)$$

satisfazem as propriedades da definição de espaço vectorial.
As seguintes noções e os seguintes resultados valem em $\mathbb{C}^n$ como em $\mathbb{R}^n$:

- matriz, transformação linear, núcleo, imagem,
- eliminação de Gauss, forma escalonada,
- espaço vectorial, independência linear, base, dimensão, coordenadas,
- determinante, valor próprio, vector próprio, diagonalização.

Dada uma matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ com entradas complexas:

Um vector não-nulo $v \in \mathbb{C}^n$, diz-se um **vector próprio complexo** de A quando Av é múltiplo escalar de v, i.e., quando $\boxed{Av = \lambda v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Nesse caso, λ diz-se o **valor próprio complexo** de A associado ao vector próprio v. O **espaço próprio complexo** de A associado ao valor próprio λ é $\boxed{E_\lambda = \text{Ker } (A - \lambda \text{Id})}$ em $\mathbb{C}^n$. Uma **base própria complexa** de A é uma base de $\mathbb{C}^n$ constituída por vectores próprios complexos de A.
A partir daqui, mesmo que não seja dito o adjectivo "complexo", considera-se as noções de vector próprio, valor próprio, etc. neste contexto mais geral.

Por definição de polinómio característico,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \text{Id}) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\text{tr}A) \lambda^{n-1} + \ldots + (\det A) \ . \end{aligned}$$

Pelo teorema fundamental da Álgebra,

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n) \\ &= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n) \lambda^{n-1} + \ldots + \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \ , \end{aligned}$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios (complexos) de A com multiplicidades (i.e., os λ_j's podem ser repetidos). Assim,

$$\boxed{\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\text{tr}A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n} \ ,$$

ou seja, o determinante é igual ao produto dos valores próprios (com multiplicidades) e o traço é igual à soma dos valores próprios (com multiplicidades).

Um **bloco de Jordan** para o valor $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma matriz quadrada da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

i.e.,

- todas as entradas da diagonal principal são λ,
- todas as entradas imediatamente acima da diagonal principal são 1 e
- todas as outras entradas são 0.

Uma **forma canónica de Jordan** para uma matriz A é uma matriz J formada por blocos de Jordan ao longo da diagonal e semelhante a A (i.e., $A = SJS^{-1}$ para alguma matriz invertível S).

Uma **decomposição de Jordan** para A é uma factorização de A do tipo

$$A = SJS^{-1}$$

onde S é uma matriz invertível (matriz de mudança de base) e J é uma matriz do tipo

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_k} \end{bmatrix}$$

com cada J_j um bloco de Jordan para o valor λ_j,

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \lambda_j & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_j & 1 \\ & & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Teorema: Qualquer matriz quadrada tem formas canónicas de Jordan.

Para **achar decomposições de Jordan** para A, começa-se por calcular os valores próprios e os vectores próprios de A.

- **Quando há uma base própria de** A, achar uma decomposição de Jordan para A é *diagonalizar* A: Seja $v_1, v_2, \dots v_n$ uma base de vectores próprios de A, com $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ os respectivos valores próprios associados. Então $A = SJS^{-1}$ com

$$S = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad J = D = \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & & & \\ & \boxed{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

  Neste caso, todos os blocos de Jordan que formam J são 1×1.

- **Quando não há uma base própria de** A, para obter uma base há que completar o máximo de vectores próprios l.i. que se conseguir com *vectores próprios generalizados*. Um vector não-nulo $w \in \mathbb{C}^n$, diz-se um **vector próprio generalizado** de A para o valor próprio λ quando $(A - \lambda \mathrm{Id})^n w = 0$ para algum $n = 1, 2, 3, \dots$.
  De seguida, mostra-se como é que se obtém decomposições de Jordan para matrizes 2×2 e 3×3 com vectores próprios generalizados.

O número de blocos de Jordan em J é sempre igual ao número máximo de vectores próprios linearmente independentes de A.

Para **matrizes** 2×2 só há dois casos possíveis:

Caso 1 Há uma base constituída por vectores próprios v_1 e v_2 (eventualmente complexos) de A. Sejam λ_1 e λ_2 os respectivos valores próprios, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2$ (pode ser $\lambda_1 = \lambda_2$). Então uma decomposição de Jordan (neste caso, uma diagonalização) para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & \\ & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}}_{J=D} \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Caso 2 Todos os vectores próprios são múltiplos de um v para o valor próprio λ: tem-se $v \neq 0$ e $(A - \lambda \mathrm{Id})v = 0$. Seja w um vector próprio generalizado que é solução da equação $\boxed{(A - \lambda \mathrm{Id})w = v}$. Então uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v & w \\ | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}}_{S^{-1}}.$$

Para **matrizes** 3×3 há três casos possíveis:

Caso 1 Há uma base constituída por vectores próprios v_1, v_2 e v_3 (eventualmente complexos) de A. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 os respectivos valores próprios, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, 3$ (os λ_i's podem ser repetidos). Então uma decomposição de Jordan (neste caso, uma diagonalização) para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\lambda_1} & & \\ & \boxed{\lambda_2} & \\ & & \boxed{\lambda_3} \end{bmatrix}}_{J=D} \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Caso 2 Há dois vectores próprios v_1 e v_2 linearmente independentes, mas não três. Sejam λ_1 e λ_2 os respectivos valores próprios, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2$ (pode ser $\lambda_1 = \lambda_2$).

Quando $\lambda_1 \neq \lambda_2$, suponha-se sem perda de generalidade que λ_1 é o valor próprio com multiplicidade algébrica 2, ou seja, que o polinómio característico de A é $p_A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)$. Ache-se um vector próprio generalizado w que é solução da equação $\boxed{(A - \lambda \mathrm{Id})w = v_1}$. Então uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ & \lambda_1 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda_2} \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Quando $\lambda_1 = \lambda_2$ só há um valor próprio a que se chama λ_0, ou seja, o polinómio característico de A é $p_A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^3$. Em geral, *há que substituir os vectores próprios v_1, v_2 por outros linearmente independentes tais que um deles pertença ao espaço das colunas de $A - \lambda_0 \mathrm{Id}$.* Sem perda de generalidade, suponha-se que v_1 e v_2 já foram escolhidos de maneira a ser $\boxed{v_1 \in \mathrm{Im}\,(A - \lambda_0 \mathrm{Id})}$. Assim há um vector próprio generalizado w satisfazendo a equação $\boxed{(A - \lambda \mathrm{Id})w = v_1}$. Então uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & w & v_2 \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 \\ & \lambda_0 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\lambda_0} \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

Caso 3 Todos os vectores próprios são múltiplos de um v para o valor próprio λ: tem-se $v \neq 0$ e $(A - \lambda \mathrm{Id})v = 0$. Seja w um vector próprio generalizado que é solução da equação $\boxed{(A - \lambda \mathrm{Id})w = v}$ e seja u um vector próprio generalizado que é solução da equação $\boxed{(A - \lambda \mathrm{Id})u = w}$. Então uma decomposição de Jordan para A é

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & | \\ v & w & u \\ | & | & | \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$