Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 27/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

REVISÃO DAS PARTES I E II

Parte I

Conceitos:
equação linear, sistema de equações lineares, solução, variável livre, pivot, recta, plano, **matriz**, vector, coluna, linha, operações entre matrizes, matriz invertível, matriz transposta, matriz inversa, inversa à direita, inversa à esquerda,
matriz dos coeficientes, matriz aumentada, forma escalonada, líder,
transformação linear, núcleo ($\ker$), imagem (im), rotação, projecção, reflexão,
vector canónico, composição de transformações, transformação invertível

Um sistema de equações lineares pode ser:

- possível e **determinado** – quando admite uma e uma só solução;
- possível e **indeterminado** – quando admite mais do que uma solução (necessariamente infinitas soluções);
- **impossível** – quando não admite qualquer solução.

O **método de eliminação de Gauss** é o processo que consiste na execução de sucessivas etapas dos seguintes três tipos:

- permuta de duas linhas,
- multiplicação de uma linha por um escalar não-nulo ou
- substituição de uma linha por essa linha somada com outra,

até obter uma matriz em **forma escalonada**, i.e., uma matriz da seguinte forma:

- a 1ª entrada não-nula de cada linha (se existir) é 1, designado um **líder**,
- se uma coluna contém um *líder*, então todas as outras suas entradas são nulas e
- se uma linha contém um *líder*, todas as linhas acima têm líderes à esquerda desse.

Para que serve o **método de eliminação de Gauss**?

- para resolver sistemas de equações lineares,
- para inverter matrizes,
- para determinar núcleos e imagens de transformações lineares,
- para estudar a natureza de sistemas dependentes de parâmetros.

Seja A uma matriz $m \times n$. Como $\ker(AB) \subset \ker B$ e $\operatorname{im}(AB) \subset \operatorname{im} A$, tem-se:

- A é **invertível à esquerda** sse A é injectiva (condição necessária: $m \geq n$);
- A é **invertível à direita** sse A é sobrejectiva (condição necessária: $m \leq n$);
- condição necessária (não suficiente) para que A seja invertível: $m = n$;
- uma matriz 2×2 da forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível sse $ad - bc \neq 0$; nesse caso, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Seja A uma matriz $m \times n$, $v \in \mathbb{R}^n$ um vector incógnita e $b \in \mathbb{R}^m$ um vector dado.

- v_1 e v_2 são soluções de $\boxed{Av = b}$ sse $v_1 - v_2 \in \ker A$ (i.e., $v_1 - v_2$ é solução da **equação homogénea** $Av = 0$).
- A equação $\boxed{Av = b}$ admite solução (uma ou mais) sse $b \in \operatorname{im} A$.
- A equação $\boxed{Av = b}$ admite sempre uma e uma só solução sse A é invertível.

Seja A uma matriz $m \times n$.

- A equação $\boxed{Av = b}$ admite no máximo uma solução sse A é injectiva.
- A equação $\boxed{Av = b}$ admite sempre solução (uma ou mais) sse A é sobrejectiva.
- A equação $\boxed{Av = b}$ admite sempre uma e uma só solução sse A é invertível.

Parte II

Conceitos:
espaço vectorial, subespaço vectorial, vector,
combinação linear, subespaço gerado (ou expansão linear), independência linear,
base, dimensão, coordenadas, base canónica de $\mathbb{R}^n$, espaços de dimensão infinita,
espaço das colunas, espaço das linhas, nulidade, característica (rank),
transformação linear, núcleo, imagem, mudança de base, matrizes semelhantes,
números complexos, parte real, parte imaginária, módulo, argumento, operações

Se $v_1, \ldots, v_n$ formam uma base de um espaço vectorial V:

- Cada vector $v \in V$ representa-se de uma forma única como combinação linear dos $v_1, \ldots, v_n$; os coeficientes dessa combinação linear chamam-se as **coordenadas** de v na base $v_1, \ldots, v_n$.
- Todas as bases de V têm o mesmo número de elementos, chamado a **dimensão** de V, $\dim V = n$.
- Se $w_1, \ldots, w_p$ são p vectores de V com $p > n$, então são linearmente dependentes.
- Se $w_1, \ldots, w_p$ são p vectores de V com $p < n$, então não geram V.
- Se $w_1, \ldots, w_n$ são n vectores de V linearmente independentes, então têm que formar uma base.
- Se $w_1, \ldots, w_n$ são n vectores de V que geram V, então têm que formar uma base.

Determinação de **subespaços vectoriais associados a uma matriz** A:

- O **núcleo** (ou **espaço nulo**) de A é igual ao núcleo da forma escalonada de A.
- A **imagem** (ou **espaço das colunas**) de A em geral ⋆*não*⋆ é igual ao espaço das colunas da forma escalonada de A.
- O **espaço das linhas** de A é igual ao espaço das linhas da forma escalonada de A.

Dimensões dos subespaços associados a uma matriz A:

- A **nulidade** (i.e., a dimensão do núcleo) de A é igual ao número de colunas de A menos o número de líderes na forma escalonada de A:
$$\dim(\ker A) = \#(\text{colunas}) - \#(\text{líderes}) \ .$$
- A **característica** (i.e., a dimensão do espaço das colunas) de A é igual ao número de líderes na forma escalonada de A:
$$\dim(\operatorname{im} A) = \#(\text{líderes}) \ .$$
- A dimensão do espaço das linhas de A é igual ao número de líderes na forma escalonada de A, pelo que é igual à dimensão do espaço das colunas de A:
$$\dim(\text{esp. linhas}) = \#(\text{líderes}) = \dim(\operatorname{im} A) \ .$$

Conclui-se que: $\boxed{\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{im} A) = \#(\text{colunas})}$.

Bases para os subespaços associados a uma matriz A:

- Uma base do **núcleo** de A obtém-se descodificando as relações descritas pelas colunas sem líder na forma escalonada de A.
- Uma base da **imagem** de A é formada pelas colunas de A *correspondentes* às colunas com líderes na forma escalonada de A.
- Uma base do **espaço das linhas** de A é formada pelas linhas com líderes na forma escalonada de A.

São equivalentes as seguintes afirmações para a **matriz** $n \times n$
$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \ .$$

- A matriz A é invertível.
- A equação linear $Av = b$ tem uma única solução v para cada $b \in \mathbb{R}^n$.
- A forma escalonada de A é a identidade.
- A imagem de A é $\mathbb{R}^n$.
- O núcleo de A é $\{0\}$.
- A característica de A é n.
- A nulidade de A é 0.
- Os vectores $v_1, \dots, v_n$ geram $\mathbb{R}^n$.
- Os vectores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes.
- Os vectores $v_1, \dots, v_n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $v_1, \dots, v_n$ (base *antiga*) e $w_1, \dots, w_n$ (base *nova*) duas bases de um espaço vectorial V. A **matriz de mudança de base**, S, é a matriz $n \times n$ cuja coluna j é formada pelas coordenadas do j-ésimo vector da base nova w_j na base antiga $v_1, \dots, v_n$.
Se $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas de um vector $v \in V$ na base antiga, e $(c_1, \dots, c_n)$ são as coordenadas do mesmo vector v na base nova, então:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$$

Sejam $T : V \to W$ uma transformação linear, $v_1, \dots, v_n$ base de V e $w_1, \dots, w_m$ base de W. A **matriz que representa T em relação a estas bases**, A, é a matriz $m \times n$ cuja coluna j é formada pelas coordenadas de $T(v_j)$ na base $w_1, \dots, w_m$.
Se $(x_1, \dots, x_n)$ são as coordenadas de um vector $v \in V$ na base $v_1, \dots, v_n$, e $(y_1, \dots, y_m)$ são as coordenadas de $T(v) \in W$ na base $w_1, \dots, w_m$, então:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} .$$

Sejam $T : V \to V$ uma transformação linear, $v_1, \dots, v_n$ (base *antiga*) uma base de V e $w_1, \dots, w_n$ (base *nova*) outra base de V.
Sejam A a matriz que representa T em relação à base $v_1, \dots, v_n$, B a matriz que representa T em relação à base $w_1, \dots, w_n$ e S a matriz de mudança de base. Então $\boxed{AS = SB}$.
Sempre que duas matrizes A e B se relacionam por uma expressão $B = S^{-1}AS$ para alguma matriz invertível S, diz-se que A e B são **matrizes semelhantes**.

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear e V tem dimensão finita, então: $\boxed{\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = \dim V}$.

Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vectoriais com $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

- T é **invertível à esquerda** sse T é injectiva (condição necessária: $n \leq m$).
- T é **invertível à direita** sse T é sobrejectiva (condição necessária: $m \leq n$).
- Condição necessária (não suficiente) para que T seja invertível: $m = n$