Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 11/Dez/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 8 – APLICAÇÕES E COMPLEMENTOS

Sistemas Dinâmicos Discretos

(1) *(Problema dos coelhos de Fibonacci)*
Um homem compra um casal de coelhos e coloca-os numa coelheira para criação. Em cada mês, cada casal de coelhos adultos gera um casal de coelhinhos. Cada coelhinho só começa a procriar no seu segundo mês. Ou seja, representando por $a(k)$ o número de casais de coelhos adultos no mês k e por $b(k)$ o número de casais de coelhos ainda bebés no mês k, tem-se

$$\begin{cases} a(0) = 1 \\ b(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a(1) = 1 \\ b(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a(2) = 2 \\ b(2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a(3) = 3 \\ b(3) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a(4) = 5 \\ b(4) = 3 \end{cases} \quad \cdots$$

A sequência de números $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$, onde cada termo é obtido somando os dois anteriores, é chamada a *sucessão de Fibonacci*.

(a) Escreva fórmulas exprimindo $a(k+1)$ e $b(k+1)$ em termos de $a(k)$ e $b(k)$. Ache a matriz A tal que

$$\begin{bmatrix} a(k+1) \\ b(k+1) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a(k) \\ b(k) \end{bmatrix} \ .$$

(b) Ache uma fórmula fechada para $a(k)$.

(c) Qual é o limite quando k tende para infinito da razão $\frac{a(k)}{b(k)}$?
Comentário: Esse limite é igual ao *número de ouro*.

(2) *(Problema da Olimpíada Ibero-Americana de Matemática Universitária de 8/Nov/03)*
Algumas crianças estão a brincar ao "telefone sem fios". A criança C_0 sussurra três palavras à criança C_1, a qual sussurra o que ouviu à criança C_2 e assim por diante até a mensagem chegar à criança C_n. Para cada uma das três palavras há exactamente uma palavra "gémea" foneticamente muito semelhante (por exemplo, as palavras *razão* e *ração* dizem-se gémeas pois é muito fácil confundi-las).
Cada criança C_{k+1} tem $\frac{1}{2}$ de probabilidade em perceber correctamente o que a criança C_k lhe sussurrou, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de entender mal a 1ª palavra trocando-a com a sua gémea, tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a 2ª palavra com a sua gémea e tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de trocar a 3ª palavra com a sua gémea – nunca troca mais do que uma palavra. Numa troca a mensagem pode ser acidentalmente corrigida.
Calcule a probabilidade da criança C_n ouvir exactamente a mensagem original.

Sistemas de Equações Diferenciais

(3) Para cada uma das matrizes M do exercício (17) da Ficha 7:
   (a) usando a decomposição de Jordan $M = SJS^{-1}$ calculada, ache a exponencial $e^{Mt} = Se^{Jt}S^{-1}$;
   (b) determine a solução geral da equação diferencial $\dot{y} = My$, onde $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ representa a função incógnita;
   (c) escreva n funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação diferencial $\dot{y} = My$.

(4) Seja $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ uma solução não identicamente nula da equação
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$
Sem resolver a equação, mostre que o quadrado da norma $|y(t)|^2$ é uma função estritamente crescente.

(5) (a) Resolva a equação diferencial
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
e esboce as trajectórias das soluções $\{y(t) : t \in \mathbb{R}\}$.
   (b) Considere uma matriz real 2×2 A não invertível e com dois valores próprios distintos. Um dos valores próprios de A tem que ser o zero. Sejam v_1 e v_2 vectores próprios de A associados aos valores próprios $\lambda_1 = 0$ e λ_2. Qual é o aspecto das trajectórias das soluções da equação $\dot{y} = Ay$ para os casos em que λ_2 é negativo e positivo?

(6) Seja V um subespaço vectorial (complexo) de dimensão finita do espaço de todas as funções infinitamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{C}$. Prove que, se V for fechado para a derivação, i.e.,
$$f(t) \in V \quad \Longrightarrow \quad \frac{df}{dt} \in V \ ,$$
então V é fechado para as translações, i.e.,
$$f(t) \in V \ \text{ e } \ a \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(t+a) \in V \ .$$

Sugestão: A condição da hipótese indica que há um sistema de equações diferenciais do tipo $\dot{y} = My$ satisfeita pelas funções de uma base de V. O que é que podem ser as soluções dessa equação?

Valores Próprios e Vectores Próprios de Matrizes Simétricas, Anti-Simétricas, Hermiteanas, Anti-Hermiteanas, Ortogonais e Unitárias

(7) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. Assume-se que as dimensões das matrizes são sempre tais que as operações façam sentido.
  (a) Se A é unitária, então A^2 é unitária.
  (b) Se A é unitária, então A^t é unitária.
  (c) Se A é unitária, então A^* é unitária.
  (d) Se A é unitária, então A^{-1} é unitária.
  (e) Se A e B são unitárias, então AB é unitária.
  (f) Se A e B são unitárias, então $A + B$ é unitária.
  (g) Se A e B são hermiteanas, então $A + B$ é hermiteana.
  (h) Se A é hermiteana e não-nula, então A é invertível.
  (i) Se A e B são hermiteanas, então AB é hermiteana.
  (j) Se A e B são hermiteanas, então ABA é hermiteana.
  (k) Se A e B comutam, então A^* e B^* comutam.
  (l) Se A é unitária, então as entradas de A têm módulo menor ou igual a 1.
  (m) Qualquer que seja a matriz A, a matriz produto A^*A é hermiteana.
  (n) Qualquer que seja a matriz quadrada A, a matriz $\frac{1}{2}(A + A^*)$ é hermiteana.
  (o) Qualquer que seja a matriz quadrada A, a matriz $\frac{1}{2}(A - A^*)$ é hermiteana.

(8) Uma *rotação* em $\mathbb{R}^3$ é uma transformação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal e com determinante 1. Mostre que T fixa algum vector não-nulo, i.e., existe $v \neq 0$ com $T(v) = v$. Este resultado é conhecido por *teorema de Euler*.

> **Sugestão:** Considere o polinómio característico $p_A(\lambda)$ de uma matriz que representa T e o exercício 2 da Ficha 7.

(9) Classifique as seguintes matrizes quanto a serem hermiteanas, anti-hermiteanas ou unitárias.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3i \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(10) (a) Mostre que uma matriz simétrica ou uma matriz hermiteana $n \times n$ tem n valores próprios reais (contados com multiplicidades).

> **Sugestão:** Pelo teorema fundamental da Álgebra, uma matriz $n \times n$ A tem n valores próprios complexos contados com multiplicidades. Considere-se um desses valores próprios de A associado ao vector próprio v. Pela definição de vector próprio e pela propriedade das matrizes simétricas ou das matrizes hermiteanas ($\langle Av, w\rangle = (Av)^t w = \langle v, Aw\rangle$), tem-se $\lambda\langle v, v\rangle = \langle Av, v\rangle = \langle v, Av\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$.

  (b) Mostre que uma matriz anti-simétrica ou uma matriz anti-hermiteana $n \times n$ tem n valores próprios imaginários puros (contados com multiplicidades).

(11) Mostre que se uma matriz A é unitária, então os valores próprios de A pertencem à circunferência de raio 1 e centro na origem: $|\lambda| = 1$. Compare com o exercício (2) da Ficha 7.

(12) Mostre que, se uma matriz A é simétrica, anti-simétrica, ortogonal, hermiteana, anti-hermiteana ou unitária, e se λ e μ são valores próprios de A distintos, associados a vectores próprios v e w respectivamente, então v e w são ortogonais: $\langle v, w\rangle = 0$.

Sugestão: Para o caso de uma matriz simétrica ou hermiteana, considere $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$. Para o caso de uma matriz ortogonal ou unitária, considere $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$.

Teorema Espectral

(13) (a) Ache o determinante da matriz $n \times n$ com todas as entradas da diagonal iguais a a e todas as outras entradas iguais a b:

$$\begin{bmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{bmatrix}.$$

Sugestão: Calcule os valores próprios e suas multiplicidades algébricas para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = A + (k-1)\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & k \end{bmatrix}.$$

(b) Considere n vectores unitários $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tais que o ângulo entre v_i e v_j é de $60°$ para quaisquer $i \neq j$. Ache o volume n-dimensional do paralelepípedo gerado por $v_1, \dots, v_n$.

Sugestão: Considere a matriz A cujas colunas são os vectores $v_1, \dots, v_n$ e considere o determinante da matriz $A^t A$.

(14) Diagonalize a matriz $n \times n$ com 1's ao longo de ambas as diagonais e zeros fora delas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15) Considere uma matriz simétrica A. Se o vector v está na imagem de A e w está no núcleo de A, será que v e w são necessariamente ortogonais?

Formas Quadráticas

(16) Classifique as seguintes matrizes quanto a serem (semi-)definidas positivas, negativas ou indefinidas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(17) Classifique as seguintes formas quadráticas quanto a serem (semi-)definidas positivas, negativas ou indefinidas.
(a) $q(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$
(b) $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$
(c) $q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$
(d) $q(x,y,z) = 3y^2 + 4xz$
(e) $q(x,y) = x^2 + 4xy + ay^2$ (onde a é um parâmetro real)
Indique uma forma quadrática diagonal correspondente e uma matriz diagonalizante.

(18) (a) Se A é uma matriz simétrica, o que é que se pode dizer sobre a definição (positiva/negativa) de A^2? Quando é que A^2 é definida positiva?
(b) Se A é uma matriz simétrica invertível, qual é a relação entre a definição (positiva/negativa) de A e de A^{-1}?

(19) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ uma matriz 2×2 simétrica onde a e $\det A$ são ambos positivos. Mostre que A é definida positiva.

Sugestão: Comece por mostrar que $c > 0$ e que por isso $\mathrm{tr} A > 0$. Considere então os sinais dos valores próprios.

(20) Esboce e classifique as curvas dadas pelas seguintes equações.
(a) $6x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$
(b) $xy = 1$
(c) $3x^2 + 4xy = 1$
(d) $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 1$
(e) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 1$
(f) $-3x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$