Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 26/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 7 – VECTORES PRÓPRIOS E DIAGONALIZAÇÃO

Cálculo de Valores Próprios

(1) Usando o polinómio característico, calcule os valores próprios das seguintes matrizes e as respectivas multiplicidades algébricas.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) Mostre que os valores próprios reais de uma matriz ortogonal só podem ser ± 1.

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

onde k é uma constante real arbitrária. Para que valores de k é que a matriz A tem três valores próprios distintos? Sugestão: esboce o gráfico da função $g(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda$ e ache os seus máximos e mínimos locais.

Cálculo de Vectores Próprios

(4) Para cada uma das seguintes matrizes, ache os valores próprios, uma base de cada espaço próprio e, se possível, uma base própria da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

onde a, b e c são constantes arbitrárias. Como é que as multiplicidades geométricas dos valores próprios 1 e 2 dependem das constantes a, b e c? Quando é que há uma base própria de A?

Diagonalização

(6) Decida se cada uma das matrizes M do exercício (4) é diagonalizável. Sempre que possível, ache matrizes S invertível e D diagonal tais que $S^{-1}MS = D$.

(7) Considere uma matriz $n \times n$ diagonalizável A com m valores próprios distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Mostre que

$$(A - \lambda_1 \mathrm{Id})(A - \lambda_2 \mathrm{Id}) \dots (A - \lambda_m \mathrm{Id}) = 0 \ .$$

(8) Para que valores de a, b e c reais é que as seguintes matrizes são diagonalizáveis?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Matrizes Semelhantes

(9) Mostre que a relação de semelhança entre matrizes $n \times n$ é uma relação de equivalência, i.e., é
(a) reflexiva: qualquer matriz A é semelhante a si própria;
(b) simétrica: se A é semelhante a B, então B é semelhante a A; e
(c) transitiva: se A é semelhante a B e B a C, então A é semelhante a C.
Conclua que, em particular, se duas matrizes A e B são ambas semelhantes a uma terceira matriz M, então A é semelhante a B.

(10) Decida se as matrizes dos seguintes pares são semelhantes.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(11) Suponha que $B = S^{-1}AS$ para certas matrizes $n \times n$ A, B e S.
(a) Mostre que se $v \in \mathrm{Ker}\ B$, então $Sv \in \mathrm{Ker}\ A$.
(b) Mostre que a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(v) = Sv$, fornece uma bijecção entre $\mathrm{Ker}\ B$ e $\mathrm{Ker}\ A$, i.e., a restrição $T : \mathrm{Ker}\ B \to \mathrm{Ker}\ A$ é bijectiva.
(c) Mostre que A e B têm a mesma nulidade e a mesma característica.

(12) (a) Mostre que se $B = S^{-1}AS$ para matrizes quadradas A, B e S invertível, então $B^n = S^{-1}A^nS$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$.
(b) Determine uma fórmula para B^n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, onde $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

(13) Ache duas matrizes 2×2 A e B tais que AB não é semelhante a BA.
Sugestão: Pode ser $AB = 0$ mas $BA \neq 0$.

Números Complexos

(14) Se z é um número complexo escrito em coordenadas polares, descreva $\frac{1}{z}$ em coordenadas polares. Qual é a relação entre o complexo conjugado $\overline{z}$ e $\frac{1}{z}$? Represente números z, $\overline{z}$ e $\frac{1}{z}$ no plano complexo.

(15) Determine todos os valores próprios e vectores próprios (reais e complexos) das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & -15 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(16) (a) Considere um polinómio $p(\lambda)$ com coeficientes reais. Mostre que se um número complexo λ_0 é uma raiz de $p(\lambda)$ (i.e., $p(\lambda_0) = 0$), então o seu complexo conjugado $\overline{\lambda_0}$ também é raiz de $p(\lambda)$.

(b) Considere uma matriz $n \times n$ com entradas reais A. Mostre que se λ_0 é um valor próprio complexo de A associado a um vector próprio complexo v, então $\overline{\lambda_0}$ também é valor próprio complexo de A e $\overline{v}$ é um correspondente vector próprio complexo. Ou seja, valores próprios complexos e vectores próprios complexos de uma matriz real surgem em pares de complexos conjugados.

Forma Canónica de Jordan

(17) Para cada uma das seguintes matrizes M, ache uma forma canónica de Jordan J e uma respectiva matriz de mudança de base S tal que $S^{-1}MS = J$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(18) Decida quando é que as matrizes dos seguintes pares (com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) são semelhantes.

(a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$

(19) Dada uma matriz $n \times n$ A defina formalmente para $t \in \mathbb{R}$ a matriz

$$e^{At} = \mathrm{Id} + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \ldots$$

(a convergência desta série de matrizes é demonstrada em disciplinas de Análise).

(a) Sendo J a forma canónica de Jordan de A (i.e., J é uma matriz de Jordan e $S^{-1}AS = J$), mostre que

$$e^{At} = S e^{Jt} S^{-1} \ .$$

(b) Mostre que se $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é um bloco de Jordan 2×2 para o valor próprio λ, então

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad \text{e} \qquad e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} \ .$$

(c) Usando os resultados das alíneas anteriores, calcule e^{Mt} para as matrizes M do exercício (17).

(20) Determine uma forma canónica de Jordan para a transformação linear correspondente à derivação $D : V \to V$ no espaço vectorial V dos polinómios complexos de grau menor ou igual a 3.