Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 15/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 6 – DETERMINANTES E VALORES PRÓPRIOS

Propriedades dos Determinantes

(1) Calcule os determinantes das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 9 & 7 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) Considere uma matriz 4×4 A com linhas w_1, w_2, w_3 e w_4 e com $\det A = 8$. Ache os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 & - \\ - & -5w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} - & w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_2 & - \\ - & w_1 & - \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} - & w_1 & - \\ - & w_2 + 5w_4 & - \\ - & w_3 & - \\ - & w_4 & - \end{bmatrix}$

(3) Será que o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1000 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 1000 & 8 \\ 1000 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1000 \\ 1 & 2 & 1000 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

é positivo ou negativo? Não o calcule.

(4) Mostre que duas matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.
Conclua que o determinante de uma transformação linear $T : V \to V$ está bem definido como sendo o determinante de uma matriz A que representa T em relação a uma qualquer base de V.

(5) Considere dois números reais distintos, a e b. Defina a função

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{bmatrix} .$$

(a) Mostre que $f(x)$ é uma função quadrática, i.e., é dada por um polinómio de grau 2 em x.

(b) Explique porque é que $f(a) = f(b) = 0$. Conclua que $f(x) = k(x-a)(x-b)$ para uma certa constante k. Calcule k.

(c) Para que valores de x é que esta matriz é invertível?

Fórmula de Laplace e Regra de Cramer

(6) Use a fórmula de Laplace para calcular os determinantes das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 30 & 94 & 46 & 14 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 47 & 23 & 15 & 1 \end{bmatrix}$$

(7) Para que escolhas de α é que a seguinte matriz é invertível?

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 1 & -\sin\alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin\alpha & 3 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

(8) Use a regra de Cramer para resolver os sistemas:

(a) $\begin{cases} 3x + 7y &= 1 \\ 4x + 11y &= 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 5x - 3y &= 1 \\ -6x + 7y &= 0 \end{cases}$

(9) Considere uma matriz quadrada A com entradas inteiras e tal que $\det A = 1$. Será que as entradas de A^{-1} são necessariamente números inteiros? Explique.

Área e Volume

(10) Considere os vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Ache a área do paralelogramo definido por v_1 e v_2.

(b) Ache a área do triângulo definido por v_1 e v_2, i.e., o triângulo com vértices $(0,0)$, $(3,7)$ e $(8,2)$.

(11) Considere matrizes 4×4 cujas entradas são todas 1, -1 ou 0.
Qual é o máximo valor do determinante de uma matriz deste tipo?
Dê um exemplo de uma matriz cujo determinante tenha esse valor máximo.

(12) Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e R um paralelogramo em $\mathbb{R}^2$ definido por vectores linearmente independentes v_1 e v_2. A imagem de R por T,

$$T(R) = \{T(v) : v \in R\}$$

é o paralelogramo definido pelos vectores $T(v_1)$ e $T(v_2)$. Seja A a matriz que representa T em relação à base canónica. Mostre que

$$\frac{\text{área de } T(R)}{\text{área de } R} = |\det A| \ .$$

Valores Próprios e Vectores Próprios

(13) Calcule os valores próprios e os vectores próprios das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(14) Determine todas as matrizes 2×2 para as quais:

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio com valor próprio 5, e

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio.

(15) Mostre que duas matrizes semelhantes têm os mesmos valores próprios.
Sugestão: Se v é um vector próprio de $S^{-1}AS$, então Sv é um vector próprio de A.

(16) Suponha que A é uma matriz $n \times n$ invertível e que v é um vector próprio de A associado ao valor próprio λ.
(a) Será que v é um vector próprio de A^3? Se sim, qual é o valor próprio associado?
(b) E será de A^{-1}? Se sim, qual é o valor próprio associado?
(c) E será de $A + 2\mathrm{Id}$? Se sim, qual é o valor próprio associado?

(17) Argumentando geometricamente, ache os vectores próprios e os valores próprios das seguintes transformações lineares.
(a) Reflexão relativamente à recta $y = -x$ em $\mathbb{R}^2$.
(b) Rotação por um ângulo π em $\mathbb{R}^2$.
(c) Reflexão num plano P em $\mathbb{R}^3$.
(d) Projecção ortogonal numa recta L em $\mathbb{R}^3$.

Polinómios Característicos

(18) Escreva os polinómios característicos das seguintes matrizes e use-os para calcular os valores próprios.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(19) Considere uma matriz quadrada arbitrária A.
Qual é a relação entre o polinómio característico de A e da matriz transposta A^t?
O que é que a sua resposta permite concluir sobre os valores próprios de A e de A^t?

(20) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ onde a, b e c são constantes reais não nulas.
Para que escolhas de a, b e c é que a matriz A tem dois valores próprios distintos?