Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 12/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 5

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Produto Interno Usual

(1) (a) $\theta = \arccos \frac{-1}{2\sqrt{15}}$ (b) $u \cdot v = 0$ sse $k = -2$ (c) $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

(3)
(a) $(x, y, z) = (t, 3t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$
(b) Como o ponto $(-1, -2, -3)$ pertence à recta, a distância pedida é zero.
(c) $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$
(d) $(-3, 1, 0)$, $(-2, 0, 1)$
(e) $(1, 1, 1) + \alpha(-3, 1, 0) + \beta(-2, 0, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
(f) $x + 3y + 2z = 6$
(g) A distância d do ponto $(-1, -2, -3)$ ao plano P é igual à norma do vector

$$\text{proj}_{S^\perp}((-1, -2, -3) - (1, 1, 1)) = \left((-2, -3, -4) \cdot \frac{(1, 3, 2)}{|(1, 3, 2)|}\right) \frac{(1, 3, 2)}{|(1, 3, 2)|},$$

onde $S = \mathcal{L}((-3, 1, 0), (-2, 0, 1))$ é a direcção do plano P, o seu ortogonal $S^\perp$ é o subespaço gerado por $(1, 3, 2)$, por exemplo, e $(1, 1, 1)$ é um qualquer ponto pertencente a P. Portanto $d = \left|(-2, -3, -4) \cdot \frac{(1,3,2)}{|(1,3,2)|}\right| = \frac{19}{\sqrt{14}}$.

Produto Interno Geral

(5) Todas as operações são simétricas e lineares. Quanto à positividade:
(a) Não satisfaz: $\ll (0, 1), (0, 1) \gg = 0$ mas $(0, 1) \neq (0, 0)$.
(b) Não satisfaz: $\ll (-1, 1), (-1, 1) \gg = -2 < 0$.
(c) Satisfaz: $\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^3 \geq 0$ para qualquer vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle = 0$ sse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
(d) Satisfaz: $\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^3 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ para qualquer vector $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)\rangle = 0$ sse $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 0$ sse $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
(e) Satisfaz: $\langle (x, y), (x, y)\rangle = x^2 + xy + y^2 = \frac{x^2}{2} + 2(\frac{x}{2} + \frac{y}{2})^2 + \frac{y^2}{2} \geq 0$ para qualquer vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\langle (x, y), (x, y)\rangle = 0$ sse $x^2 = (\frac{x}{2} + \frac{y}{2})^2 = y^2 = 0$ sse $x = y = 0$.
(f) Não satisfaz: $\ll (1, 1), (1, 1) \gg = 0$ mas $(1, 1) \neq (0, 0)$.

(a) • A simetria decorre da primeira parte da sugestão e das propriedades das matrizes transpostas $(CD)^t = D^tC^t$ e $(C^t)^t = C$:

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\ (A^tB) = \mathrm{tr}\ (A^tB)^t = \mathrm{tr}\ (B^tA) = \langle B,A\rangle\ .$$

• Quanto à linearidade, considere-se quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e matrizes A,B,C e note-se a linearidade do traço:

$$\begin{aligned}\langle \lambda A + B, C\rangle &= \mathrm{tr}\ ((\lambda A + B)^tC) \\ &= \mathrm{tr}\ (\lambda A^tC + B^tC) \\ &= \lambda \mathrm{tr}\ (A^tC) + \mathrm{tr}\ (B^tC) \\ &= \lambda\langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle\ .\end{aligned}$$

• Para verificar a positividade, escreva-se A em termos das suas colunas:

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^t = \begin{bmatrix} - & v_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}\ .$$

Então

(7)
$$A^tA = \begin{bmatrix} - & v_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & v_n & - \end{bmatrix}\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & \dots & v_1\cdot v_n \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & \dots & v_2\cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n\cdot v_1 & v_n\cdot v_2 & \dots & v_n\cdot v_n \end{bmatrix}$$

pelo que o traço (que é a soma das entradas da diagonal) é

$$\mathrm{tr}\ A^tA = \underbrace{v_1\cdot v_1}_{|v_1|^2} + \underbrace{v_2\cdot v_2}_{|v_2|^2} + \ldots + \underbrace{v_n\cdot v_n}_{|v_n|^2}\ .$$

Sendo uma soma de números não negativos, $\mathrm{tr}\ A^tA \geq 0$ sempre, e só se anula quando todas as parcelas são zero, i.e.,

$$\mathrm{tr}\ A^tA = 0 \iff |v_1|^2 = \ldots = |v_n|^2 = 0 \iff v_1 = \ldots = v_n = 0\ ,$$

o que demonstra a positividade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(b) Uma matriz $m \times 1$ é uma coluna de m entradas. Se $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, então $A^tB = a_1b_1 + \cdots a_mb_m$ e portanto $\mathrm{tr}\ A^tB = a_1b_1 + \ldots + a_mb_m$ reduz-se ao produto interno usual em $\mathbb{R}^m$.

(c) Uma matriz $1 \times n$ é uma linha de n entradas. Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$, então o produto A^tB é uma matriz $n \times n$ cujo traço é $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$, ou seja, coincide com o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ dos vectores (colunas) A^t e B^t.

(9)

• Esta operação é sempre linear.
• Esta operação é simétrica sse a matriz A é simétrica (i.e., $A = A^t$).
• Falta verificar quando é que satisfaz a propriedade da positividade.
Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ uma matriz simétrica e $v = (x, y)$ um vector em $\mathbb{R}^2$. Então $\langle v, v\rangle = ax^2 + 2bxy + dy^2$.
Se $a \leq 0$, a operação não satisfaz a positividade: por exemplo, para $v = (-1, 0) \neq (0, 0)$ obtém-se $\langle v, v\rangle = ax^2 \leq 0$.
Suponhamos que $a > 0$. Completando os quadrados, tem-se

$$\langle v, v\rangle = ax^2 + 2bxy + dy^2 = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y\right)^2 + \left(d - \frac{b^2}{a}\right) y^2 \ .$$

Então

$$\langle v, v\rangle \geq 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R} \iff d - \frac{b^2}{a} > 0 \iff \det A > 0 \ ,$$

e nesse caso (quando $a > 0$ e $\det A > 0$) tem-se

$$\langle v, v\rangle = 0 \iff \begin{cases} \sqrt{a}x + \frac{b}{\sqrt{a}}y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0 \ .$$

Conclusão: $\langle v, w\rangle = v^t A w$ define um produto interno sse a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é simétrica (i.e., $b = c$), $a > 0$ e $\det A > 0$ (i.e., $ad - bc > 0$).

Processo de Gram-Schmidt

(11)

(a) $(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$, $(\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7})$
(b) $(\frac{1}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{10}, \frac{7}{10})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

(13)

Primeiro acha-se uma base do núcleo e da imagem e depois aplica-se o processo de Gram-Schmidt.
(a) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -4, 3)$
(b) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

Matrizes Ortogonais, Transpostas e Simétricas

(15) (a) Sim (b) Sim (c) Sim

(17) Por exemplo, os vectores $(1,1,1,1)$ e $(1,2,5,4)$ formam uma base de $V^\perp$.

(19) Vai-se mostrar a igualdade, verificando as inclusões nos dois sentidos:
$\mathrm{Ker}\ A \subseteq \mathrm{Ker}\ A^tA$ e $\mathrm{Ker}\ A^tA \subseteq \mathrm{Ker}\ A$.

1º) Mostrar que $\mathrm{Ker}\ A \subseteq \mathrm{Ker}\ A^tA$:

$$v \in \mathrm{Ker}\ A \iff Av = 0 \implies A^tAv = 0 \iff v \in \mathrm{Ker}\ (A^tA)\ .$$

2º) Mostrar que $\mathrm{Ker}\ A^tA \subseteq \mathrm{Ker}\ A$:
Tem-se

$$v \in \mathrm{Ker}\ A^tA \iff A^tAv = 0 \iff Av \in \mathrm{Ker}\ A^t\ .$$

Por definição de imagem de A, tem-se $Av \in \mathrm{Im}\ A$. Portanto $Av \in \mathrm{Ker}\ A^t \cap \mathrm{Im}\ A$.
Mas como

$$\mathrm{Im}\ A = (\mathrm{Ker}\ A^t)^\perp \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Ker}\ A^t \cap (\mathrm{Ker}\ A^t)^\perp = \{0\}\ ,$$

conclui-se que $Av = 0$, i.e. $v \in \mathrm{Ker}\ A$.