Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 5 – PRODUTOS INTERNOS E ORTOGONALIDADE

Produto Interno Usual

(1) Relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^n$:

(a) Ache o ângulo entre os vectores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} .$$

(b) Para que escolha(s) da constante $k \in \mathbb{R}$ é que os seguintes vectores são perpendiculares?

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$$

(c) Ache a projecção ortogonal do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ no subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

(2) Sejam $v_1, \ldots v_m$ vectores ortonormais em $\mathbb{R}^n$, e seja v um qualquer vector também em $\mathbb{R}^n$. Quando é que as seguintes quantidades são iguais?

$$(v_1 \cdot v)^2 + \ldots + (v_m \cdot v)^2 \qquad \text{e} \qquad |v|^2$$

(3) No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ dotado do produto interno usual, seja L a recta paralela a $(1, 3, 2)$ que contém a origem, e seja P o plano ortogonal ao vector $(1, 3, 2)$ que contém o ponto $(1, 1, 1)$.

(a) Escreva uma equação paramétrica para L.
(b) Determine a distância do ponto $(-1, -3, -2)$ à recta L.
(c) Escreva uma equação cartesiana para L.
(d) Determine uma base do complemento ortogonal de L.
(e) Escreva uma equação paramétrica para P.
(f) Escreva uma equação cartesiana para P.
(g) Determine a distância do ponto $(-1, -3, -2)$ ao plano P.

(4) Considere dois vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ e forme a matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{bmatrix} .$$

Para que escolhas de v_1 e de v_2 é que A é invertível?

Produto Interno Geral

(5) Decida quais das propriedades de produto interno são satisfeitas pelas seguintes operações.
  (a) $\ll (x, y), (z, w) \gg = xz$ em $\mathbb{R}^2$.
  (b) $\ll (x, y), (z, w) \gg = xz + 2xw + 2yz + yw$ em $\mathbb{R}^2$.
  (c) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$ em $\mathbb{R}^3$.
  (d) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ em $\mathbb{R}^3$.
  (e) $\langle (x, y), (z, w) \rangle = xz + \frac{1}{2}xw + \frac{1}{2}yz + yw$ em $\mathbb{R}^2$.
  (f) $\ll (x, y), (z, w) \gg = xz - yw$ em $\mathbb{R}^2$.

Para cada uma das operações acima que não satisfazem a positividade, determine um vector onde falha a positividade. Para as que cumprem, demonstre-o.

(6) Considere um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vectorial V, e um escalar $k \in \mathbb{R}$. Para que escolhas de k é que a fórmula

$$\ll v, w \gg = k\langle v, w \rangle$$

define um produto interno?

(7) O *traço* de uma matriz quadrada é a soma das suas entradas da diagonal. Por exemplo, o traço de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é $\text{tr } A = 1 + 4 = 5$.

Para duas matrizes $m \times n$, define-se

$$\langle A, B \rangle = \text{tr } (A^t B) .$$

  (a) Verifique que esta fórmula define um produto interno no espaço $\mathcal{M}_{m \times n}$ das matrizes $m \times n$.

  Sugestão: Como C e C^t têm a mesma diagonal, tem-se $\text{tr } C = \text{tr } C^t$. Para verificar $\langle A, A \rangle > 0$, $\forall A \neq 0$, escreva A em termos das suas colunas.

  (b) Ache uma fórmula para este produto interno no caso de matrizes $m \times 1$, i.e., em $\mathcal{M}_{m \times 1} \simeq \mathbb{R}^m$.
  (c) Ache uma fórmula para este produto interno no caso de matrizes $1 \times n$, i.e., em $\mathcal{M}_{1 \times n} \simeq \mathbb{R}^n$.

(8) Considere um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ num espaço vectorial V. Será que, para $w \in V$ fixo, a transformação $T : V \to \mathbb{R}$, $T(v) = \langle v, w \rangle$ é linear? Qual é a sua imagem? Qual é o seu núcleo?

(9) Para que matrizes 2×2 A é que a fórmula

$$\langle v, w \rangle = v^t A w$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$?

Sugestão: Para a positividade, procure completar o quadrado.

(10) Considere o produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle v, w \rangle = v^t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} w \ .$$

(a) Ache todos os vectores em $\mathbb{R}^2$ perpendiculares a $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ relativamente a este produto interno.

(b) Ache uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ relativamente a este produto interno.

Processo de Gram-Schmidt

(11) Aplique o processo de Gram-Schmidt às seguintes sequências de vectores:

(a) $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \ , \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

(12) Para cada uma das operações do Exercício (5) que definem um produto interno, aplique o método de Gram-Schmidt à base canónica para obter uma base ortonormal.

(13) Ache uma base ortonormal para:

(a) o núcleo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

(b) a imagem da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Matrizes Ortogonais, Transpostas e Simétricas

(14) Considere o subespaço W de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Ache a matriz da projecção ortogonal em W.

(15) Se uma matriz A é ortogonal:
  (a) será que A^2 também é ortogonal?
  (b) será que A^t também é ortogonal?
  (c) será que as linhas de A são ortonormais?

(16) Se uma matriz quadrada A é simétrica:
  (a) será que A^2 também é simétrica?
  (b) será que, quando A é invertível, a matriz A^{-1} também é simétrica?

(17) Seja V o espaço das soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +4x_4 & = & 0 \end{cases} .$$

Ache uma base de $V^\perp$.

(18) Considere a imagem da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Ache uma base de $\mathrm{Ker}\ A^t$, e desenhe um esboço ilustrando a relação $(\mathrm{Im}\ A)^\perp = \mathrm{Ker}\ A^t$.

(19) Mostre que, para uma qualquer matriz $m \times n$ A, se tem a igualdade dos núcleos

$$\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ (A^t A) .$$

(20) Considere um sistema linear possível $Av = b$.
  (a) Mostre que este sistema admite sempre alguma solução em $(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$.

  Sugestão: Uma solução arbitrária v do sistema pode ser escrita $v = v_H + v_P$ onde $v_H \in \mathrm{Ker}\ A$ e $v_P \in (\mathrm{Ker}\ A)^\perp$.

  (b) Mostre que este sistema tem apenas uma solução em $(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$.

  Sugestão: Se v_1 e v_2 forem ambas soluções em $(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$, considere a diferença $v_1 - v_2$.

  (c) Se v_0 é a solução em $(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$ e v é uma qualquer outra solução deste sistema fora de $(\mathrm{Ker}\ A)^\perp$, mostre que $|v_0| < |v|$.
  O vector v_0 chama-se a *solução mínima* do sistema $Av = b$.