Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 31/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 4

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Coordenadas e Dimensão em $\mathbb{R}^n$

(1) (a) $1, 0$ (b) $0, 2$ (c) $3, -1$ (d) $-5, 2$ (e) $3, -1$

(3)
(a) $\dim(E\cap F) = 1$, $\dim(E+F) = 2$ (b) $\dim(E\cap F) = 2$, $\dim(E+F) = 4$
(c) $\dim(E\cap F) = 1$, $\dim(E+F) = 4$ (d) $\dim(E\cap F) = 2$, $\dim(E+F) = 4$
(e) $\dim(E\cap F) = 1$, $\dim(E+F) = 2$

Comentário: Para quaisquer subespaços E e F de dimensão finita, tem-se a seguinte igualdade:

$$(*) \qquad \dim(E\cap F) + \dim(E+F) = \dim E + \dim F.$$

Se $u_1, \ldots, u_n$ e $v_1, \ldots, v_m$ são bases de E e F respectivamente, considere-se a matriz A cujas $n+m$ colunas são os vectores destas duas bases. Então $E+F$ é o espaço das colunas de A. Também se verifica que $\dim(E\cap F) = \dim \mathcal{N}(A)$ embora estes dois espaços vectoriais sejam diferentes. Logo, usando a igualdade $\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{I}(A) = \#$(colunas de)$A$, obtém-se (*) uma vez que o número de colunas de A é $\dim E + \dim F$.

Mudanças de Base

(5)

(a) $T(\lambda A+B)=(\lambda A+B)^t=(\lambda A)^t+B^t=\lambda A^t+B^t=\lambda T(A)+T(B)$ para quaisquer $\lambda\in\mathbb{R}$ e $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(b) $C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

(c) Como $\dim\mathcal{M}_{2\times 2}=4$, basta verificar que as matrizes

$$F_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, F_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, F_3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}, F_4=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$$

são linearmente independentes.

$aF_1+bF_2+cF_3+dF_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ sse $\begin{bmatrix}a-c&b-d\\b+d&a+c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ sse $\begin{cases}a-c&=&0\\b-d&=&0\\b+d&=&0\\a+c&=&0\end{cases}$ sse $\begin{cases}a=0\\b=0\\c=0\\d=0\end{cases}$. Portanto F_1, F_2, F_3 e F_4 são l. i.

(d) $S=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

(7)

(a)
$$\begin{aligned}T(\lambda p(x)+q(x))&=x(\lambda p(x)+q(x))'+(\lambda p(x)+q(x))''\\&=x\lambda p'(x)+xq'(x)+\lambda p''(x)+q''(x)\\&=\lambda(xp'(x)+p''(x))+(xq'(x)+q''(x))\\&=\lambda T(p(x))+T(q(x))\end{aligned}$$
para quaisquer $\lambda\in\mathbb{R}$ e $p(x),q(x)\in\mathcal{P}_2$.

(b) $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\2&0&0\end{bmatrix}$

(c) $S=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$, $B=S^{-1}AS=\begin{bmatrix}2&-2&2\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

Núcleo, Imagem e Invertibilidade de Transformações Lineares

(9)

(a) $T(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) - (\lambda X + Y)A = \lambda AX + AY - \lambda XA - YA = \lambda T(X) + T(Y)$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

(b) $T_A(\mathrm{Id}) = A\mathrm{Id} - \mathrm{Id}A = 0$ para qualquer matriz A, logo $\mathrm{Id} \in \mathcal{N}(T_A)$, logo $\dim \mathcal{N}(T_A) \geq 1$. Como $\dim \mathcal{N}(T_A) + \dim \mathcal{I}(T_A) = \dim \mathcal{M}_{n\times n}$, então $\dim \mathcal{I}(T_A) < \dim \mathcal{M}_{n\times n}$ e portanto $\mathcal{I}(T_A) \neq \mathcal{M}_{n\times n}$, ou seja, T_A não é sobrejectiva.

(c) Não. Por exemplo, se $A = \mathrm{Id}$ então $T_{\mathrm{Id}}(X) = \mathrm{Id}X - X\mathrm{Id} = 0$ para qualquer $X \in \mathcal{M}_{n\times n}$ porque a matriz identidade comuta com todas as matrizes.

(11)

(a) A operação de derivação de ordem n satisfaz $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty$.

(b) $\mathcal{N}(D) = \{$funções constantes$\}$

(c) $\mathcal{N}(D^2) = \{$polinómios de grau menor ou igual a $1\}$

(d) $\mathcal{N}(D^n) = \{$polinómios de grau menor ou igual a $n-1\}$

(e) D (assim como D^n) não é invertível porque $\mathcal{N}(D) \neq \{0\}$.

(13) As proposições (a), (d) e (h) são falsas, todas as outras são verdadeiras.

Números Complexos

(15) A equação $w^n = z$ (para $z \in \mathbb{C}$ fixo) resolve-se mais convenientemente usando coordenadas polares. Se $z \neq 0$, a equação tem sempre n soluções dadas por

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n})} \quad , k = 0, \ldots, n-1$$

onde $r = |z|$ (o módulo de z) e $\theta = \arg(z)$ (o argumento de z). Portanto $|w| = \sqrt[n]{r}$ e $\arg(w) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi k}{n} \mod 2\pi$ (i.e. a menos de um múltiplo inteiro de 2π). Se $z = 0$, então $w = 0$ é a única solução de $w^n = 0$ para qualquer inteiro positivo n.

(17) As coordenadas polares de $-i$ são $|-i| = 1$ e $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2}$, logo, em termos da exponencial complexa, $-i = e^{\frac{3\pi}{2}i}$. O símbolo $\sqrt[n]{-i}$ representa o conjunto dos números da forma

$$e^{\frac{(3+4k)\pi}{2n}i}\ , \qquad \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

Deduz-se que $\sqrt{-i}$ simboliza

$$e^{\frac{3\pi}{4}i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{7\pi}{4}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\ ,$$

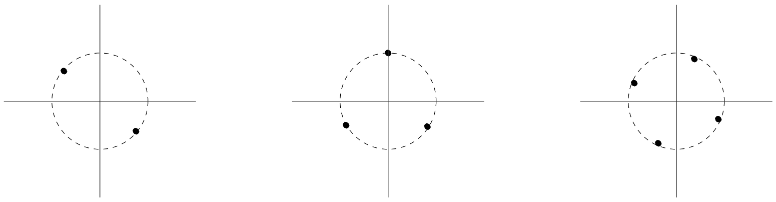
$\sqrt[3]{-i}$ simboliza

$$e^{\frac{3\pi}{6}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i\ , \qquad e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{11\pi}{6}i} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\ ,$$

e $\sqrt[4]{-i}$ simboliza

$$e^{\frac{3\pi}{8}i}\ , \qquad e^{\frac{7\pi}{8}i}\ , \qquad e^{\frac{11\pi}{8}i} \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{15\pi}{8}i}\ .$$

Os números $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ e $\sqrt[4]{-i}$ têm o aspecto na figura abaixo, onde a circunferência tracejada tem raio 1.



$\sqrt{-i}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{-i}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{-i}$

(19) Para um ângulo φ real, temos

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = e^{3\varphi i} = (e^{\varphi i})^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3\ .$$

Como

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi\ ,$$

extraindo as partes imaginárias, obtém-se

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\ .$$

Temos $\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi = e^{4\varphi i} = (e^{\varphi i})^4 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^4$. Como

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 \;&=\; \cos^4\varphi + 4i\cos^3\varphi\sin\varphi \\ &\quad -6\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 4i\cos\varphi\sin^3\varphi + \sin^4\varphi\ ,\end{aligned}$$

extraindo as partes reais, obtém-se

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi\ .$$