Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 27/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 4 – MUDANÇAS DE BASE E NÚMEROS COMPLEXOS

Coordenadas e Dimensão em $\mathbb{R}^n$

(1) Considere a seguinte base (ordenada) de $\mathbb{R}^2$: $(1,2),(3,5)$.
Nesta base, escreva as coordenadas dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^2$:
$(1,2)$, $(6,10)$, $3(1,2)-(3,5)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

(2) Considere a seguinte base (ordenada) de $\mathbb{R}^3$: $(1,2,1),(-1,-1,0),(-1,0,3)$.
Nesta base, escreva as coordenadas dos seguintes vectores de $\mathbb{R}^3$:
$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(2,4,2)$, $(1,2,3)$, $(2,-1,1)$, $(2,2,2)$.
(Sugestão: há uma maneira de acelerar a resolução de vários sistemas de equações em que a matriz dos coeficientes é sempre a mesma e é invertível.)

(3) Para os seguintes pares de espaços, determine a dimensão de $E \cap F$ e de $E+F$ (definido no Exercício (2) da Ficha 3).
(a) $E=\mathcal{L}(\{(1,1,1),(1,0,1)\})$ e $F=\mathcal{L}(\{(3,2,3)\})$
(b) $E=\mathcal{L}(\{(1,1,-1,-1),(1,1,1,1),(1,1,2,2)\})$ e
$F=\mathcal{L}(\{(1,0,0,1),(0,1,1,1),(1,1,0,1)\})$
(c) $E=\mathcal{L}(\{(1,1,-1,-1),(1,1,1,1)\})$ e
$F=\mathcal{L}(\{(1,-1,0,1),(1,-1,1,0),(1,1,2,2)\})$
(d)
$$E=\mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right\}\right)$$
e
$$F=\mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}\right)$$
(e) $E=\mathcal{L}(\{1+x+x^2,1+x^2\})$ e $F=\mathcal{L}(\{3+2x+3x^2\})$

Mudanças de Base

(4) Seja $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z)=(x,z,y)$.
(a) Mostre que T é uma transformação linear.
(b) Determine a matriz A que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$.
(c) Mostre que $(1,1,1),(1,1,-1),(-1,1,1)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
(d) Determine a matriz de mudança de base S e a matriz B que representa T em relação à base (ordenada) da alínea anterior.

(5) No espaço das matrizes 2×2, considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$, $T(A) = A^t$, que leva uma matriz para a sua transposta.
 (a) Mostre que T é uma transformação linear.
 (b) Determine a matriz C que representa T em relação à base
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
 (c) Mostre que
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
 (d) Determine a matriz de mudança de base S e a matriz D que representa T em relação à base da alínea anterior.

(6) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a aplicação $D : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$.
 (a) Mostre que D é uma transformação linear.
 (b) Determine a matriz A que representa D em relação à base ordenada $x^2, x, 1$.
 (c) Mostre que $1 + x + x^2, 1 + x - x^2, -1 + x + x^2$ é uma base de $\mathcal{P}_2$.
 (d) Determine a matriz de mudança de base S e a matriz B que representa D em relação à base ordenada da alínea anterior.
 (e) Sendo $\mathrm{Id} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, $\mathrm{Id}(p(x)) = p(x)$, a transformação identidade em $\mathcal{P}_2$, prove que $D^2 + \mathrm{Id}$ é uma transformação linear.
 (f) Determine a matriz C que representa $D^2 + \mathrm{Id}$ em relação à base ordenada $x^2, x, 1$.

(7) Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a aplicação $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por $T(p(x)) = xp'(x) + p''(x)$.
 (a) Mostre que T é uma transformação linear do espaço $\mathcal{P}_2$ nele próprio.
 (b) Determine a matriz A que representa T em relação à base $x^2, x, 1$ de $\mathcal{P}_2$.
 (c) Determine a matriz de mudança de base S e a matriz B que representa T em relação à base $1 + x + x^2, 1 + x - x^2, -1 + x + x^2$.

Núcleo, Imagem e Invertibilidade de Transformações Lineares

(8) Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
e $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ a função definida por $T(X) = AX - XA$.
 (a) Mostre que T é uma transformação linear.
 (b) Determine a nulidade e a característica de T.

(9) Seja A uma matriz $n \times n$ e $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ definida por $T_A(X) = AX - XA$.
  (a) Mostre que T_A é sempre uma transformação linear.
  (b) Esta transformação pode alguma vez ser sobrejectiva?
  (c) Se T_A for a transformação nula tem-se necessariamente que A é a matriz nula?

(10) Para cada uma das transformações lineares dos Exercícios (4)-(7), determine bases para o núcleo e para a imagem.

(11) Seja C^∞ o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciáveis (i.e., que têm derivadas de todas as ordens em todos os pontos) e seja $D : C^\infty \to C^\infty$, $Df = f'$, a aplicação que transforma cada função na sua derivada.
  (a) Mostre que D é uma transformação linear.
  (b) Determine o núcleo de D.
  (c) Repita as alíneas anteriores para D^2.
  (d) Repita as alíneas anteriores para D^n para qualquer inteiro positivo n.
  (e) A transformação linear D é invertível?

(12) Seja V o subespaço vectorial de C^∞ (definido no exercício anterior) gerado pelas funções $\sin x$, $\cos x$ e e^x.
  (a) Mostre que estas funções são linearmente independentes.
  (b) Determine uma base de V.
  (c) Mostre que a aplicação derivação, $D : V \to C^\infty$ (ver exercício anterior), tem imagem contida em V.
  (d) Decida se $D : V \to V$ é invertível.
  (e) Resolva em V a equação $Df = \sin x + e^x$.

(13) Decida o valor lógico das seguintes proposições:
  (a) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
  (b) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^5$ para $\mathbb{R}^3$.
  (c) Existem transformações lineares injectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
  (d) Existem transformações lineares sobrejectivas de $\mathbb{R}^3$ para $\mathbb{R}^5$.
  (e) Existem transformações lineares injectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
  (f) Existem transformações lineares sobrejectivas do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o espaço das matrizes 2×2.
  (g) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^4$ é sobrejectiva.
  (h) Qualquer transformação linear injectiva de $\mathbb{R}^4$ para $\mathbb{R}^5$ é sobrejectiva.
  (i) Existe uma trasformação linear bijectiva do espaço dos polinómios de grau menor ou igual a 3 para o das matrizes 2×2.

Números Complexos

(14) Escreva em coordenadas cartesianas $(a + bi)$ e em coordenadas polares $(\rho e^{i\theta})$ os seguintes números complexos:

(a) $3i$
(b) -7
(c) $1 + i$
(d) $2 + 2i$
(e) $1 - i$
(f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
(g) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
(h) $\frac{5}{i}$
(i) $2e^{\frac{\pi}{4}i}$
(j) $e^{\frac{-8\pi}{3}i}$
(k) $(1 + i)^{10}$
(l) $(3 - 3i)^3$
(m) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-121}$
(n) $\frac{2}{1+i}$
(o) $\frac{1-i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$
(p) $\frac{(1-i)^3}{(-1+\sqrt{3}i)^5}$

(15) Para um número complexo z, determinar o módulo e o argumento de todas as suas raízes de ordem n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, i.e., de todas as soluções w da equação $w^n = z$, em termos do módulo e do argumento de z.

(16) Esboce os conjuntos dados pelas seguintes condições:
(a) $|z + 1 - i| \leq 3$;
(b) $\mathrm{Im}\, z > 1$ e $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$;
(c) $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 0$;
(d) $|z + i| > 2|z|$.

(17) Calcule $\sqrt{-i}$, $\sqrt[3]{-i}$ e $\sqrt[4]{-i}$ e represente estes números geometricamente.

(18) Resolva as seguintes equações:
(a) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$;
(b) $z\overline{z} - z + \overline{z} = 0$;
(c) $z^3 = (2 - i)^3 + \frac{1+28i}{2+i}$.

(19) Exprima $\cos 4\varphi$ e $\sin 3\varphi$ em termos de $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.

(20) Um *espaço vectorial complexo* é um conjunto V munido de duas operações

$$\begin{array}{ll} V \times V & \to V \\ (f, g) & \mapsto f + g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} \mathbb{C} \times V & \to V \\ (\lambda, f) & \mapsto \lambda f \end{array}$$

chamadas *adição de vectores* e *produto de vectores por escalares complexos*, satisfazendo as mesmas propriedades da definição de espaço vectorial real, substituindo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$.

Mostre que se V é um espaço vectorial complexo com base $v_1, \ldots, v_n$, então o mesmo conjunto equipado com adição de vectores e multiplicação restrita a escalares reais forma um espaço vectorial real com base $v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n$.