Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 20/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 3 – ESPAÇOS VECTORIAIS E BASES

Espaços e Subespaços

(1) Determine quais dos seguintes conjuntos, munidos das operações habituais de adição e multiplicação por escalares, formam espaços vectoriais.
   (a) O eixo dos yy no plano euclideano: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.
   (b) A recta horizontal de equação $x = 1$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$.
   (c) A recta bissectriz dos quadrantes pares em $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$.
   (d) A circunferência de raio 1 centrada na origem em $\mathbb{R}^2$.
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}\}$.
   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$.
   (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$.
   (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
   (i) O núcleo de uma aplicação linear.
   (j) A imagem de uma aplicação linear.
   (k) O semi-plano superior em $\mathbb{R}^2$: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$.
   (l) A união dos eixos coordenados em $\mathbb{R}^n$.
   (m) O conjunto dos polinómios p tais que $p(1) = 0$.
   (n) O conjunto dos polinómios p de coeficientes inteiros.
   (o) O conjunto dos polinómios p de grau igual a três.
   (p) O conjunto das funções reais de variável real pares.
   (q) O conjunto das funções que satisfazem a equação diferencial $f' - f = 0$ (como a exponencial).
   (r) O conjunto das funções que satisfazem a equação diferencial $f'' + f = 0$ (como o seno e o co-seno).
   (s) O conjunto das sucessões convergentes.
   (t) O conjunto das sucessões convergentes para 1.
   (u) O conjunto das sucessões convergentes para 0.
   (v) O conjunto das matrizes 3×3 invertíveis.
   (w) O conjunto das matrizes 3×3 triangulares superiores.
   (x) O conjunto das matrizes 3×3 cujo núcleo contém o vector $(1, 2, 3)$.
   (y) O conjunto das matrizes 3×3 diagonais.
   (z) O conjunto das matrizes 2×2 que comutam com $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) Mostre que, se U e V são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^n$, então:
   (a) $U \cap V$ é subespaço vectorial;
   (b) $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$ é subespaço vectorial;
   (c) $U + V$ é o menor subespaço vectorial que contém U e V;
   (d) $U \cup V$ em geral não é subespaço vectorial.

(3) O que é que são os subespaços de dimensão 0, 1, 2 e 3 em $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?

Expansão Linear e Independência Linear

(4) Quais dos seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^2$?
- (a) $\{(1,2),(2,3)\}$
- (b) $\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$
- (c) $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$
- (d) $\{(x,1) : x \in \mathbb{R}\}$

(5) Quais dos seguintes conjuntos geram $\mathbb{R}^3$?
- (a) $\{(1,0,1),(1,2,3)\}$
- (b) $\{(1,1,2),(2,2,1),(1,0,0)\}$
- (c) $\{(1,1,2),(2,2,1),(0,0,1)\}$
- (d) $\{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,0),(1,1,1)\}$

(6) Quais dos seguintes conjuntos de vectores são linearmente independentes?
- (a) $\{(1,0),(0,1)\}$
- (b) $\{(1,y) : y \in \mathbb{R}\}$
- (c) $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$
- (d) $\{(1,1,1,1,1),(1,-1,1,-1,1),(2,1,2,1,2)\}$
- (e) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
- (f) O conjunto de funções $\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$
- (g) O conjunto de funções $\{1, x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n}, \ldots\}$ (onde 1 representa a função constante igual a 1).
- (h) O conjunto de polinómios $\{x^2 - x + 1, x - 1, x^2 - x + 3\}$.

(7) Será que a função $\cos(2x)$ pertence a $\mathcal{L}(\sin x, \cos x)$? E a $\mathcal{L}(\sin^2 x, \cos^2 x)$?

Bases e Dimensão

(8) Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vectoriais.
- (a) $\mathcal{L}(\{(1,1,1,1,),(1,1,-1,-1),(3,3,1,1)\})$
- (b) $\mathcal{L}(\{(1,1,2),(2,2,3),(3,3,4)\})$
- (c) $\mathcal{L}(\{(x,x,x+1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\})$ (Sugestão: ver a alínea anterior.)
- (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$
- (e) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 - x_4\}$
- (f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z \wedge x - 2z = y\}$
- (g) $\mathcal{L}\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$
- (h) Conjunto das matrizes 2×2 simétricas: $\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A = A^t\}$
- (i) Conjunto das matrizes 2×2 que comutam com $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
- (j) Conjunto dos polinómios p de grau menor ou igual a 3 que satisfazem $p(1) = 0$
- (k) Conjunto dos polinómios p de grau menor ou igual a 2 que satisfazem $p'(x) = 2xp(x)$ (Atenção: o espaço vectorial trivial $\{0\}$ não admite base.)

(9) Complete os seguintes conjuntos até obter uma base de $\mathbb{R}^3$:
(a) $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$
(b) $\{(2,1,0)\}$
(c) $\{(2,3,1),(1,4,2)\}$

(10) Complete os seguintes conjuntos até obter uma base de $\mathbb{R}^4$:
(a) $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$
(b) $\{(1,-1,0,0),(1,-1,2,2),(0,0,1,-1)\}$
(c) $\{(0,0,1,2),(0,0,2,3)\}$

(11) Para que escolha(s) do parâmetro k é que os seguintes vectores formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\\k\end{bmatrix}.$$

(12) Mostre que, se $\dim V = m$, então:
(a) podem-se achar no máximo m vectores linearmente independentes em V;
(b) é necessário pelo menos m vectores para gerar V;
(c) se m vectores são linearmente independentes, então formam uma base de V;
(d) se m vectores geram V, então eles formam uma base de V.

Bases para o Núcleo e a Imagem

(13) Determine uma base para o núcleo e para a imagem de cada uma das matrizes do exercício (10) da ficha 1, e diga qual é a característica e a nulidade em cada um dos casos. (No exercício (18) da ficha 2 já terão sido calculados o núcleo e a imagem de cada uma dessas matrizes.)

(14) Para cada uma das matrizes do exercício (7) da ficha 2, determine bases para o espaço das colunas, para o espaço das linhas e para o núcleo.

(15) Use os cálculos do exercício anterior para decidir se as matrizes em causa admitem inversa à direita ou inversa à esquerda.

(16) Existe alguma matriz 3×4 invertível à direita? E à esquerda?

(17) Consegue encontrar uma matriz 2×2 cuja imagem coincida com o núcleo? E uma matriz 3×3?

(18) Considere a matriz $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} .$$

Justifique a equivalência das seguintes afirmações.
(a) A matriz A é invertível.
(b) A equação linear $Av = b$ tem uma única solução v para cada $b \in \mathbb{R}^n$.
(c) A forma escalonada de A é a identidade.
(d) A característica de A é n.
(e) A imagem de A é $\mathbb{R}^n$.
(f) O núcleo de A é $\{0\}$.
(g) Os vectores $v_1, \dots, v_n$ formam uma base de $\mathbb{R}^n$.
(h) Os vectores $v_1, \dots, v_n$ geram $\mathbb{R}^n$.
(i) Os vectores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes.

(19) Determine o valor lógico das seguintes proposições.
(a) A característica de uma matriz é a dimensão do seu espaço das colunas.
(b) A característica de uma matriz é a dimensão do seu espaço das linhas.
(c) A característica de uma matriz é igual ao seu número de colunas menos a nulidade.
(d) A característica de uma matriz é igual ao seu número de linhas menos a nulidade.
(e) Uma matriz é invertível à direita se e só se a sua característica é igual ao número de linhas.
(f) Uma matriz é invertível à esquerda se e só se a sua característica é igual ao número de colunas.

(20) Sejam A e B duas matrizes para as quais faz sentido o produto AB. Determine o valor lógico das seguintes proposições acerca da característica (car) de matrizes.
(a) $\mathrm{car}(AB) = \min(\mathrm{car}(A), \mathrm{car}(B))$.
(b) $\mathrm{car}(AB) \leq \min(\mathrm{car}(A), \mathrm{car}(B))$.
(c) Se A é invertível à esquerda, então $\mathrm{car}(AB) = \mathrm{car}(B)$.
(d) Se B é invertível à esquerda, então $\mathrm{car}(AB) = \min(\mathrm{car}(A), \mathrm{car}(B))$.
(e) Se B é invertível à direita, então $\mathrm{car}(AB) = \mathrm{car}(A)$