Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 17/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 2

SOLUÇÕES SUMÁRIAS DOS EXERCÍCIOS ÍMPARES

Matrizes: Inversão e Formas Escalonadas

(1) Como se viu no exercício (15) da ficha 1, uma matriz diagonal é invertível se e só se nenhuma das entradas na diagonal principal é zero. Portanto, a matriz A é invertível, mas a matriz B não é. Ainda pelo exercício (15) da ficha 1, a matriz inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \pi^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & (1+\pi)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & (1-\pi)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Se X for uma matriz 2×2 qualquer, a primeira linha do produto CX é a soma das linhas de X e a segunda linha de CX é a segunda linha de X. Como $C^{-1}(CX) = (C^{-1}C)X = \mathrm{Id}X = X$, o efeito da multiplicação por C^{-1} à esquerda tem que ser o oposto do da multiplicação por C à esquerda, neste caso isso corresponde a subtrair a segunda linha da primeira e a não alterar a segunda linha. (Há um argumento semelhante para colunas, analisando os produtos na ordem XC.) Logo,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obter as inversas das matrizes D e E, pode-se proceder de maneira análoga, mas usando matrizes 3×3. O resultado é

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$(D^2E)^{-1}D = E^{-1}(D^2)^{-1}D = E^{-1}D^{-2}D = E^{-1}D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comentário: No método de eliminação de Gauss, a operação de subsituir uma linha da matriz pela soma dela com um múltiplo (não-nulo) de outra corresponde à multiplicação à esquerda por uma matriz elementar (a definição de matriz elementar aparece no exercíco (2); C, D e E são matrizes elementares).

(3) (a) Para ver se a matriz é invertível, aplica-se eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & k & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2k-15}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right].$$

A matriz é invertível se e só se $2k-15 \neq 0$.

(b) Quando $k \neq \frac{15}{2}$, o processo de Gauss conduz a:

$$\cdots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2k-15} & \frac{2}{2k-15} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{k}{2k-15} & \frac{-3}{2k-15} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{2k-15} & \frac{2}{2k-15} \end{array}\right]$$

o que mostra que, para que a inversa $\begin{bmatrix} \frac{k}{2k-15} & \frac{-3}{2k-15} \\ \frac{-5}{2k-15} & \frac{2}{2k-15} \end{bmatrix}$ tenha entradas inteiras, é necessário e suficiente que $\frac{1}{2k-15}$ seja um número inteiro n, ou seja, que $k = \frac{15}{2} + \frac{1}{2n}$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Comentário: Alternativamente, poder-se-ia ter utilizado na alínea (a) o critério para a invertibilidade de uma matriz 2×2 encontrado no exercício (16) da ficha 1, e na alínea (b) a expressão para a matriz inversa também encontrado nesse exercício.

(5) Como há no máximo um líder por linha e por coluna numa forma escalonada, o número de líderes é menor ou igual ao número de linhas e ao número de colunas da matriz. Usa-se esta observação na determinação dos tipos de formas escalonadas.

(a) Uma matriz 2×2 pode ter zero, um ou dois líderes. A única forma escalonada com zero líderes é a matriz nula. As formas escalonadas com um líder são

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{onde } a \in \mathbb{R}\ .$$

A matriz identidade é a única forma escalonada 2×2 com dois líderes. Assim, há quatro tipos de matrizes 2×2 em forma escalonada.

(b) As formas escalonadas 3×2 (que têm no máximo dois líderes, nas duas primeiras linhas) obtêm-se a partir das formas escalonadas 2×2 acrescentando uma linha de zeros. Logo, há quatro tipos de formas escalonadas 3×2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})\ .$$

(c) As matrizes 2×3 em forma escalonada têm no máximo dois líderes. As formas escalonadas com dois líderes são (para $a, b \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As formas escalonadas com um líder são:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz nula é a única forma escalonada sem líderes. No total há sete tipos de formas escalonadas 2×3.

Invertibilidade à Direita e à Esquerda

(7) (a) Não tem inversa à direita. Um exemplo duma inversa à esquerda é $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(b) Não tem inversa à esquerda. Um exemplo duma inversa à direita é $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$.

(c) A inversa da matriz é $\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\0 & 1 & \frac{3}{2}\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(d) Não é invertível à direita nem à esquerda.

(e) Não é invertível à direita nem à esquerda.

(f) Não tem inversa à esquerda. Um exemplo duma inversa à direita é $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$.

(g) Não tem inversa à direita. Um exemplo duma inversa à esquerda é $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(h) Não tem inversa à direita nem à esquerda.

(i) Nao tem inversa à direita nem à esquerda.

(j) Não tem inversa à esquerda. Uma inversa à direita é $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(k) Não tem inversa à direita. Uma inversa à esquerda é $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2} & 0 & -1\\1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\-1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

Comentários:

- Usando o exercício (10) sobre transposição, a resposta às alineas (b), (e) e (g) pode ser obtida a partir das alíneas (a), (d) e (f), respectivamente.
- Uma matriz é invertível à direita (resp., à esquerda) se e só se representa uma transformação linear sobrejectiva (resp., injectiva).

(9) (a) O núcleo da matriz J (i.e., o conjunto dos vectores solução da equação $Jv = 0$) é o conjunto dos múltiplos do vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Uma solução particular do sistema $Jv = b$ pode ser $\begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}$, uma vez que $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ são colunas da matriz J. Portanto, as soluções do sistema são

$$v = \begin{bmatrix} \pi \\ e \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

(b) A matriz X satisfaz $J^t X = 0$ sse todas as colunas de X pertencem ao núcleo de J^t. Mas como $\mathcal{N}(J^t) = \{0\}$, conclui-se que X tem que ser a matriz nula.

Comentário: Alternativamente, notando que J^t é invertível à esquerda (o que equivale a dizer que é injectiva, ou seja, $\mathcal{N}(J^t) = \{0\}$), pode-se resolver a equação, multiplicando ambos os membros por $(J^t)^{-1}$ à esquerda:

$$J^t X = 0 \implies (J^t)^{-1} J^t X = (J^t)^{-1} 0 \iff X = 0 \; .$$

Transposição

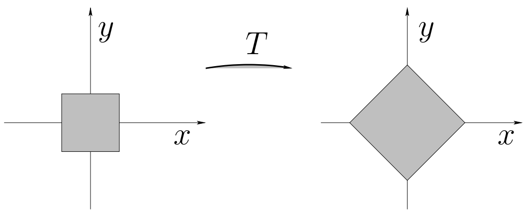
(11) (a) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad AA^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^t A = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

(b) $A^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad AA^t = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^t A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

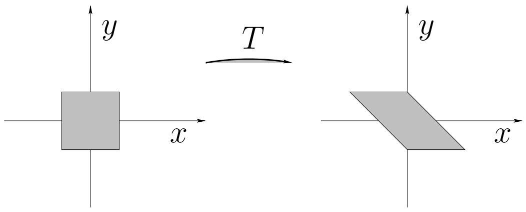
(c) $A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad AA^t = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 3 \\ 13 & 17 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A^t A = \begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

Transformações Lineares

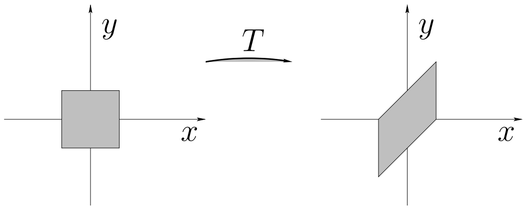
(13) (a) As imagens dos vectores canónicos são $T(e_1) = (1, 1)$ e $T(e_2) = (-1, 1)$, portanto T é a composição duma rotação de um ângulo $\frac{\pi}{4}$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com uma mudança de escala de um factor $\sqrt{2}$ (i.e., a transformção linear representada pela matriz $\sqrt{2}\mathrm{Id}$).
Também se pode interpretar geometricamente a transformação em termos da imagem por T de um quadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$: a imagem será um quadrado de vértices $T(1, 1)$, $T(-1, 1)$, $T(1, -1)$ e $T(-1, -1)$.



(b) As imagens dos vectores canónicos são $T(e_1) = e_1$ e $T(e_2) = (-1, 1)$. A imagem do quadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$ é o losango de vértices $(0, 1)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$ e $(0, -1)$.



(c) As imagens dos vectores canónicos são $T(e_1) = (1, 1)$ e $T(e_2) = e_2$. A imagem do quadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$ é o losango de vértices $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, 2)$.



Comentário: Para determinar a imagem por uma transformação linear do quadrado de vértices $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ e $(-1, -1)$, basta calcular $T(1, 1)$ e $T(-1, 1)$ e usar a linearidade de T para determinar a imagem dos outros dois vértices.

(15) Sim, a transformação T é linear. A sua matriz, A, é obtida aplicando T a cada um dos vectores canónicos, mais precisamente a i-ésima coluna de A é dada por $T(e_i) = u \times e_i$. Se $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, a matriz A é $\begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$.

<u>**Núcleo e Imagem**</u>

(17) O domínio da transformação linear é $\mathbb{R}^3$ porque o núcleo é sempre um subconjunto do domínio. O conjunto de chegada pode ser $\mathbb{R}^n$ para $n \geq 2$, mas nunca $\mathbb{R}$, porque senão o núcleo é um plano (ou todo o $\mathbb{R}^3$ no caso da tranformação nula). Seja então $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear e A a sua matriz. Por definição,

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A) \quad \text{sse} \quad A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, se $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ é uma linha de A, entao

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -a + b + 2c = 0.$$

Esta equação tem infinitas soluções. Para as linhas da matriz A devemos escolher duas soluções que não sejam múltiplas uma da outra. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. A tranformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ representada por A é dada por $T(x, y, z) = (x + y, 2x + z)$.

(19) (a) Sim. O núcleo de A é o conjunto das soluções do sistema $Av = 0$ e o núcleo de B é o conjunto das soluções do sistema $Bv = 0$. Como B é obtida aplicando o método de Gauss à matriz A, e os dois sistemas são homogéneos, então os dois sistemas são equivalentes, i.e., têm as mesmas soluções.

(b) Não. Considere-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. A forma escalonada de A é $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vector $(1, 1)$ pertence à imagem de A, mas não à imagem de B. Logo, as imagens de A e B são diferentes.