Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 7/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA 1 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E ÁLGEBRA DE MATRIZES

Sistemas de Equações Lineares

(1) Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x - y - z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ -x - y + 3z &= 9 \end{cases}$$

(2) Determine a equação da parábola que passa pelos pontos $P = (0, -1)$, $Q = (1, 4)$ e $R = (2, 13)$.

(3) Determine todos os polinómios $p(x)$ de grau menor ou igual a 2 tais que $p(1) = 1$, $p(2) = 0$ e $p(3) = -1$.

(4) Determine todos os polinómios $p(x)$ de grau menor ou igual a 3 tais que $p(1) = p'(1) = p''(1) = 1$.

(5) O Pedro, que é irmão da Rosa, tem duas vezes mais irmãs do que irmãos, enquanto que a Rosa tem o mesmo número de irmãos e de irmãs. Quantas crianças ao todo há nesta família? (Assumindo que não há meios-irmãos.)

Método de Eliminação de Gauss-Jordan

(6) Sem fazer cálculos, diga quantas soluções tem o seguinte sistema.

$$\begin{cases} 14x_1 & +.001x_2 & +1345x_3 & -e^{\pi}x_4 & +2^6x_5 & = -19.56 \\ & e^{e^e}x_2 & -15x_3 & -x_4 & -6x_5 & = \pi^2 \\ & & -10^{100}x_3 & -10^{-100}x_4 & +x_5 & = e^{-\pi} \\ & & & 2^{-15}x_4 & -3^{-16}x_5 & = -1000 \\ & & & & 9500x_5 & = 9501 \end{cases}$$

(7) Usando o método de eliminação de Gauss, determine todas as soluções de cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

(a) $\begin{cases} x & -2y & -z & = & 1 \\ 2x & -4y & +z & = & -1 \\ 3x & -3y & +2z & = & -\frac{1}{2} \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x & -2y & -z & = & 0 \\ 2x & -4y & +z & = & 0 \\ 3x & -3y & +2z & = & 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = & 1 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = & -2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & +6x_2 & +7x_3 & +8x_4 & = & -2 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -2x_3 & & = & 0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & +6x_2 & +7x_3 & +8x_4 & = & 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 3x & -3y & +7z & = & 1 \\ 2x & -y & +3z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 3x & -3y & +7z & = & 0 \\ 2x & -y & +3z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases}$

(g) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

(h) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & 1 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} x_1 & +x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_3 & +x_4 & & & = & 0 \\ & & & & x_5 & +x_6 & = & 0 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +5x_2 & -3x_3 & = & 5 \\ & -3x_2 & +x_3 & = & -3 \end{cases}$

(8) Discuta a natureza dos seguintes sistemas de equações lineares em função dos parâmetros reais α e β, e determine todas as soluções para cada caso.

(a) $\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & -2x_4 & = 1 \\ 4x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +\alpha x_4 & = \beta \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x & +2y & -\alpha z & = 1 \\ 2x & -y & -z & = \beta \\ 9x & -2y & +z & = -1 \end{cases}$

(9) Determine para que vectores (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ é possível o sistema:

$$\begin{cases} x & +y & +z & = b_1 \\ x & -y & -z & = b_2 \\ 3x & +y & +z & = b_3 \end{cases}$$

e determine todas as soluções para $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Adição e Produto de Matrizes

(10) Para cada um dos seguintes pares de matrizes A e B, determine, quando estiverem definidas, as matrizes $A+2B$, $A-B$, A^2, B^2, AB e BA.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = [2]$ $\quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(11) Obtenha (por exemplo, usando indução) uma fórmula para a potência A^n $(n \in \mathbb{N})$ de cada uma das seguintes matrizes A.

(a) $\begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$ $\quad$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(12) Sempre que possível, dê exemplos de matrizes quadradas A e B nas condições indicadas. Caso não seja possível, justifique porquê.

(a) $AB = BA \neq 0$

(b) $AB \neq BA$

(c) $AB = 0$ e $BA \neq 0$

(d) $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

(e) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$

(f) $AB = \mathrm{Id}$ e $BA \neq \mathrm{Id}$

(13) Suponha que uma matriz 2×2 A comuta com qualquer outra matriz 2×2. Mostre que então as entradas na diagonal de A têm que ser iguais, e as entradas fora da diagonal têm que ser nulas, ou seja essa matriz tem que ser um múltiplo da identidade:

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \qquad (k \in \mathbb{R}) \ .$$

Uma tal matriz chama-se *matriz escalar*. (Sugestão: considere a comutatividade entre A e uma matriz só com uma entrada não nula.)

<u>Inversão de Matrizes</u>

(14) Sempre que possível, inverta as seguintes matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(15) Quando é que uma matriz diagonal $n \times n$ é invertível, e qual é a sua inversa?

(16) Para uma matriz 2×2, escreva, em função das suas entradas, uma condição necessária e suficiente para que ela seja invertível, e determine a expressão da matriz inversa.

(17) Sendo A e B duas matrizes $n \times n$ invertíveis, diga justificando quais das seguintes matrizes são necessariamente invertíveis, indicando nesses casos a expressão da matriz inversa. Nos casos em que a matriz não seja necessariamente invertível, ilustre as diferentes possibilidades através de exemplos.

(a) AB (b) $A + B$ (c) AB^{-1} (d) $A^p B^{-q} A^{-q} B^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$

(18) Determine todas as matrizes A que satisfazem $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainda antes de resolver o problema, será que alguma das soluções A pode ser invertível?

(19) Sejam A e B duas matrizes quadradas 4×4 tais que $AB = \mathrm{Id}$. Calcule a matriz $BA^2 - A$.

(20) Sendo A e B duas matrizes quadradas, será verdade que, se o produto AB se anula, então se tem necessariamente $A = 0$ ou $B = 0$? E se A for invertível?