Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 18/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA AVANÇADA 4

(1) Calcule o determinante da matriz

$$M_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

para n arbitrário. (A entrada ij de M_n é o mínimo de $\{i, j\}$.)

(2) Seja C_n a matriz $n \times n$ cujas entradas são todas 1, excepto aquelas imediatamente abaixo da diagonal principal que são zero. Por exemplo,

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Calcule o determinante de C_n para n arbitrário.

(3) Ache a derivada da função

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ x & 1 & 2 & 9 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} .$$

(4) Sejam A e B matrizes 2×2 só com entradas inteiras tais que A, $A + B$, $A + 2B$, $A + 3B$ e $A + 4B$ são matrizes invertíveis cujas inversas têm só entradas inteiras. Mostre que $A + 5B$ é invertível e que a sua inversa só tem entradas inteiras.

Sugestão: Considere a função $f(x) = (\det(A + xB))^2 - 1$.

(continua)

(5) Considere números reais distintos, $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Defina a matriz $(n+1) \times (n+1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_n^n \end{bmatrix} .$$

Vandermonde mostrou que o determinante de A (chamado *determinante de Vandremonde*) é o produto de todas as diferenças $(a_i - a_j)$ com $i > j$,

$$\det A = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \ ,$$

Demonstre esta fórmula por indução:

(a) Verifique-a no caso $n = 1$.

(b) Suponha que a fórmula de Vandermonde é válida para $n-1$. Considere a função

$$f(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & x \\ a_0^2 & a_1^2 & \ldots & a_{n-1}^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_0^n & a_1^n & \ldots & a_{n-1}^n & x^n \end{bmatrix} .$$

Explique porque é que $f(x)$ é uma função polinomial de grau n. Ache o coeficiente k de x^n usando a fórmula de Vandermonde com $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

(c) Explique porque é que

$$f(a_0) = f(a_1) = \ldots = f(a_{n-1}) = 0 \ .$$

Conclua que

$$f(x) = k(x - a_0)(x - a_1) \ldots (x - a_{n-1})$$

para o esclar k determinado antes. Substitua $x = a_n$ para demonstrar o caso n da fórmula de Vandermonde.

(6) Considere a matriz $n \times n$ A com entrada ij dada por

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \ .$$

Mostre que $\det A \neq 0$.