Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 6/Nov/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA AVANÇADA 3

(1) A *exponencial* de uma matriz A é definida por

$$e^A = 1 + A + A^2/2! + A^3/3! + \dots$$

Para matrizes 1×1 esta é a definição da exponencial escalar usual. Verifique que se A é uma matriz anti-simétrica, então e^A é uma matriz ortogonal.

Sugestão: Verifique primeiro que quando A e B comutam tem-se que e^{A+B} é a matriz produto de e^A com e^B. Conclua que e^{-A} é a inversa de e^A. Depois observe a transposta de e^A.

(2) O conjunto $\mathcal{P}_n$ dos polinómios de grau menor ou igual a n munido com a habitual adição de polinómios e o produto por escalares forma um espaço vectorial. Os polinómios $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$, ..., $p_n(x) = x^n$ formam a base usual deste espaço. Define-se um produto interno em $\mathcal{P}_n$ por integração entre $x = -1$ e $x = 1$:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \ .$$

Efectue o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt no caso $n = 3$ usando este produto interno e começando com a base usual.

Sugestão: Compare o resultado com os ditos *polinómios de Legendre* $\ell_0(x) = 1$, $\ell_1(x) = x$, $\ell_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $\ell_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$.

(3) Este exercício descreve um processo de definir os *quaterniões*, descobertos em 1843 pelo matemático irlandês Hamilton.
Considere o conjunto $\mathcal{H}$ de todas as matrizes 4×4 da forma

$$M = \begin{bmatrix} p & -q & -r & -s \\ q & p & s & -r \\ r & -s & p & q \\ s & r & -q & p \end{bmatrix} ,$$

onde p, q, r, s são números reais arbitrários. Pode-se escrever M mais sucintamente em blocos

$$M = \begin{bmatrix} A & -B^t \\ B & A^t \end{bmatrix} ,$$

onde A e B são matrizes de rotação-dilatação como no Exercício (3) da ficha anterior.

(a) Mostre que $\mathcal{H}$ é fechado relativamente à adição.
(b) Mostre que $\mathcal{H}$ é fechado relativamente ao produto por escalares.
(c) As alíneas (a) e (b) mostram que $\mathcal{H}$ é um subespaço do espaço das matrizes 4×4. Ache uma base para $\mathcal{H}$ e assim determine a sua dimensão.
(d) Mostre que $\mathcal{H}$ é fechado relativamente à multiplicação (de matrizes).
(e) Mostre que se $M \in \mathcal{H}$ então $M^t \in \mathcal{H}$.
(f) Para uma matriz $M \in \mathcal{H}$, calcule M^tM.
(g) Quais as matrizes $M \in \mathcal{H}$ que são invertíveis?
Se uma matriz $M \in \mathcal{H}$ é invertível, será que $M^{-1} \in \mathcal{H}$?
(h) Se $M, N \in \mathcal{H}$, será que a igualdade $MN = NM$ é sempre válida?