Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 30/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA AVANÇADA 2

(1) Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço vectorial dos polinómios de grau menor ou igual a 3. Seja $T : \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear que leva um polinómio p para o vector $(p(-1), p(0), p(1))$ dos seus valores nos pontos -1, 0 e 1. Por exemplo, $T(x^3 + 2x^2 - x + 1) = (3, 1, 3)$. Ache uma base do núcleo desta transformação.

> **Sugestão:** Escreva o que significa um polinómio pertencer ao núcleo de T.

(2) Um matriz quadrada A diz-se *nilpotente* se $A^m = 0$ para algum inteiro positivo m. Por exemplo, são nilpotentes as matrizes triangulares cujas entradas na diagonal são nulas. Considere uma matriz $n \times n$ nilpotente A.

(a) Tome o mínimo m tal que $A^m = 0$. Escolha um vector $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A^{m-1}v \neq 0$. Mostre que os vectores v, Av, A^2v, $\ldots$, $A^{m-1}v$ são linearmente independentes.

> **Sugestão:** Considere uma relação $c_0v + c_1Av + c_2A^2v + \ldots + c_{m-1}A^{m-1}v = 0$. Multiplique ambos os membros da equação por A^{m-1} para mostrar que $c_0 = 0$. Depois mostre que $c_1 = 0$, e por aí fora.

(b) Mostre que $A^n = 0$.

(3) As matrizes da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

comportam-se como números complexos $w = a + ib$, uma vez que se $z = x + iy$ corresponde ao vector $v = (x, y)$ no plano, o produto $wz = (ax - by) + i(ay + bx)$ corresponde ao produto Av. A matriz A também traduz a composição de uma dilatação por factor $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |w|$ e de uma rotação por ângulo $\theta = \arg w$ com $\cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $\sin\theta = \frac{b}{\rho}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a}{\rho} & \frac{-b}{\rho} \\ \frac{b}{\rho} & \frac{a}{\rho} \end{bmatrix} \qquad \longleftrightarrow \qquad w = a + ib = \rho e^{i\theta} \ .$$

Em particular, a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

satisfaz $J^2 = -\mathrm{Id}$, corresponde ao número complexo i e a uma rotação por $\frac{\pi}{2}$. Sendo t um número real, escreva numa forma mais simples a matriz

$$e^{Jt} = \mathrm{Id} + Jt + J^2\frac{t^2}{2!} + J^3\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

> **Sugestão:** Escreva os primeiros termos na série e observe o que acontece com cada entrada da matriz. Use as séries que definem a exponencial, o co-seno e o seno:
>
> $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$,
> $\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \ldots$ e
> $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots$.