Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 20/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

FICHA AVANÇADA 1

(1) Quantos tipos de matrizes 3×3 em forma escalonada é que há?
Tente encontrar um processo de enumerar todos os possíveis tipos de matrizes m×n em forma escalonada.

Sugestão: Ordene pela característica.

(2) Demonstre que a forma escalonada de uma matriz A é única. Ou seja, mostre que, se duas matrizes estão em forma escalonada e ambas foram obtidas de A pelo método de eliminação de Gauss, então essas duas matrizes têm que ser iguais.

Sugestão: Esta demonstração, ou uma análoga, aparece na maioria dos textos de Álgebra Linear.

(3) Verifique que para uma matriz A quadrada n×n cujas entradas são em valor absoluto todas menores do que $\frac{1}{n}$ tem-se

$$\mathrm{Id} + A + A^2 + A^3 + \ldots = (\mathrm{Id} - A)^{-1} \ .$$

Sugestão: A condição de que todas as entrada são em módulo menores do que $\frac{1}{n}$ serve para garantir que $\mathrm{Id} - A$ é invertível. Verifique formalmente que a equação é verdadeira, e depois verifique que o núcleo de $\mathrm{Id} - A$ contém apenas o zero.

(4) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear que leva e_1 para e_2, e_2 para e_3, etc. e leva e_n para e_1. Para cada k entre 1 e $n-1$, ache a dimensão do núcleo da transformação $S_k = \mathrm{Id} + T + T^2 + \ldots + T^k$.

Sugestão: Experimente primeiro com os casos $n = 3$ e $n = 4$, escrevendo as matrizes correspondentes em cada caso.

$$\mathrm{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad \mathrm{Id} + T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \quad \mathrm{Id} + T + T^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

(5) Uma matriz de permutação é uma matriz que difere da identidade apenas por reordenação de linhas. Em particular, cada coluna e cada linha de uma matriz de permutação tem exactamente uma entrada igual a 1 e todas as outras entradas são zero. Quantas são as matrizes de permutação n×n? São linearmente independentes? Geram o espaço de todas as matrizes n×n?

Sugestão: Pode começar por averiguar os casos das matrizes 4×4 ou 3×3.