

Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I,

Amélia Bastos, António Bravo, Paulo Lopes

2011

Introdução

Neste texto apresentam-se os enunciados de conjuntos de exercícios para as aulas de problemas do curso de Cálculo Diferencial e Integral I do Mestrado em Engenharia Aeroespacial e do Mestrado em Engenharia Mrcância.

Complementam-se esses enunciados com conjuntos de exercícios resolvidos ver-sando a matéria associada a cada um dos referidos conjuntos de exercícios.

1^a Ficha de problemas

Princípio de indução matemática. O axioma do supremo e suas consequências

1. Usando o princípio de indução matemática, demonstre as seguintes afirmações:

a) $5^{2n} - 1$ é divisível por 8, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$

b) $n < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$

c)

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

d)

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2. Mostre que o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| + |x + 1| < 5\}$$

é limitado.

3. Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 1 > 2x\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 3x^3 + 2x^2 \leq 0\} \quad C = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

(a) Mostre que $A =] -\infty, 1[$ e $B = [-2, -1] \cup \{0\}$. Verifique se os conjuntos A , B , C , $A \cap B \cap C$, são majorados ou minorados e caso sejam, indique em \mathbb{R} o conjunto dos majorantes e dos minorantes dos mesmos.

(b) Caso existam, determine em \mathbb{R} o supremo, infímo, máximo e mínimo de cada um dos conjuntos A , B , C , $A \cap B \cap C$.

4. Mostre que, se X e Y são subconjuntos de \mathbb{R} , tais que, $\sup X > \inf Y$, existem $x \in X$ e $y \in Y$, tais que, $y < x$

Exercícios resolvidos

Recorrendo ao método de indução matemática, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$, o natural $n^3 + 2n$ é divisível por 3.

Resolução. Pretende-se provar que $n^3 + 2n = 3k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Para base da indução tem-se, com $n = 1$,

$$1^3 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow k = 1 \in \mathbb{Z}$$

logo a base da indução é uma proposição verdadeira. Para o passo indutivo, $n^3 + 2n = 3k \Rightarrow (n+1)^3 + 2(n+1) = 3k'$ ($k, k' \in \mathbb{Z}$), tem-se

$$(n+1)^3 + 2(n+1) = (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = 3(k + n^2 + n + 1) \Rightarrow k' = k + n^2 + n + 1 \in \mathbb{Z}$$

Logo o passo indutivo é verdadeiro e proposição é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2^a Ficha de problemas

Sucessões de números reais

1. Considere a sucessão x_n

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 + 2)$$

- Recorrendo ao princípio de indução matemática, verifique que $1 < x_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$.
- Mostre que a sucessão é decrescente.
- A sucessão x_n é convergente em \mathbb{R} ? Justifique.

2. Seja u_n o termo geral de uma sucessão tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n > 0 \quad \text{e} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

- Justifique que a sucessão u_n é convergente. Mostre ainda, recorrendo à definição de limite, que o limite de u_n não pode ser um número negativo.
- Indique o supremo e o ínfimo do conjuntos dos termos da sucessão e conclua se este conjunto tem máximo ou mínimo? Justifique brevemente as respostas.

3. Determine, se existirem, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n :

$$a) \frac{n^2 - 1}{n^4 + 3}, \quad b) \frac{2^n + 1}{2^{n+1} - 1}, \quad c) \frac{n^{\frac{1}{2}} + n}{n^{\frac{1}{3}} + (n^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}, \quad d) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^2}, \quad e) \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} 9^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-n} + 9^{\frac{n}{2}}}.$$

4. Considere as sucessões x_n e y_n , tais que x_n é uma sucessão monótona, y_n é uma sucessão limitada

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Mostre que a sucessão x_n é limitada.
- Mostre que as sucessões x_n e y_n são convergentes e que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a \in \mathbb{R}$$

3^a Ficha de problemas

Sucessões de números reais

1. Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões que têm por termo de ordem n :

$$a) \frac{n^n}{3^n n!}, \quad b) \frac{3^n}{n^2}, \quad c) \frac{n^{80} + n!}{n^n + 50n!}, \quad d) \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$$

2. Analise as sucessões u_n , v_n e w_n do ponto de vista da convergência e determine, caso existam, os seus sublimites

$$a) u_n = \cos(n! \pi), \quad b) v_n = \frac{n \cos(n\pi)}{2n+1}, \quad c) w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

3. a) Mostre que se u_{2n} converge para $a \in \mathbb{R}$ e u_{2n+1} converge para $b \in \mathbb{R}$, então a e b são os únicos sublimites de u_n .
b) Mostre que se u_{2n} , u_{2n+1} , u_{3n} são convergentes então u_n é convergente.

4. Considere a sucessão de termos positivos, x_n , definida por

$$x_1 = 3 \quad x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{x_n + 3}$$

- a) Mostre que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| = \frac{6|x_{n+1} - x_n|}{(x_n + 3)(x_{n+1} + 3)}.$$

- b) Mostre que a sucessão x_n é contrativa ou seja que existe $0 < c < 1$ tal que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$

- c) Sendo x_n convergente, determine o valor de $\lim x_n$.

Exercícios resolvidos

Considere a sucessão majorada u_n , definida por

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 2} \quad n \in \mathbb{N}$$

- i) Mostre por indução matemática que a sucessão u_n é estritamente crescente.
- ii) A sucessão u_n é convergente? Justifique.
- iii) Determine o limite da sucessão $v_n = \frac{3^{2n+2} + 3^{2n-1}}{9 + 9^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Resolução.

- i) Pretende-se provar que $u_{n+1} - u_n > 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, $u_2 - u_1 = \sqrt{3\sqrt{2} + 2} - \sqrt{2} > 0$. A base da indução é, portanto, verdadeira. Para $m \in \mathbb{N}$ mostre-se que se $u_{m+1} - u_m > 0$ então $u_{m+2} - u_{m+1} > 0$. Da definição da sucessão, tem-se

$$u_{m+2} - u_{m+1} = \sqrt{3u_{m+1} + 2} - \sqrt{3u_m + 2} = \frac{\overbrace{u_{m+1} - u_m}^{\text{(da hipótese de indução)}}}{\sqrt{3u_{m+1} + 2} + \sqrt{3u_m + 2}} > 0$$

Pelo princípio de indução matemática $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, isto é, a sucessão u_n é estritamente crescente.

- ii) Da alínea anterior, como u_n é estritamente crescente é limitada inferiormente, sendo o seu primeiro termo, u_1 , um dos minorantes do conjunto dos seus termos. Sendo u_n também majorada conclui-se que a sucessão u_n é uma sucessão limitada. A sucessão u_n é assim convergente pois é uma sucessão monótona e limitada.

iii)

$$v_n = \frac{3^{2n+2} + 3^{2n-1}}{9 + 9^{n+1}} = \frac{3^2 9^n + 3^{-1} 9^n}{9 + 9 \cdot 9^n}$$

Dividindo ambos os membros da fração pela exponencial dominante (de maior base), 9^n , vem

$$\frac{9 + 3^{-1}}{9^{1-n} + 9} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9 + 3^{-1}}{0 + 9} = \frac{28}{27}$$

Considere a sucessão

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(n\pi/2)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- i) Indique, caso existam em \mathbb{R} , o supremo, ínfimo, máximo e mínimo do conjunto dos termos da sucessão u_n .
- ii) A sucessão é convergente? Justifique.
- iii) A subsucessão u_{3n} é convergente? Justifique e em caso afirmativo determine o sublimite.

Resolução.

- i) Tem-se

$$u_{4n} = u_{4n+2} = u_{2n} = 0, \quad u_{4n+1} = \frac{-1}{4n+1} \text{ e } u_{4n+3} = \frac{1}{4n+3}$$

Como as subsucessões indicadas contêm todos os termos da sucessão u_n , u_{4n+1} é crescente e u_{4n+3} é decrescente resulta que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,

$$u_1 = -1 \leq u_n \leq 1/3 = u_3$$

Então, sendo $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$,

$$\sup U = \max U = 1/3 \text{ e } \inf U = \min U = -1$$

- ii) Como u_n é o produto de uma sucessão limitada, $a_n = (-1)^n \sin(n\pi/2)$, por um infinitésimo, $b_n = 1/n$, $u_n \rightarrow 0$ logo trata-se de uma sucessão convergente.
- iii) Dado que, pela alínea anterior, u_n é uma sucessão convergente, qualquer subsucessão de u_n é convergente para o limite de u_n . Logo u_{3n} é convergente e o seu limite é 0.

Considere a sucessão convergente $v_n = x_n + y_n$, $n \in \mathbb{N}$ em que

$$x_n = \frac{2^{n+5} - 3^n}{3^{n+1} + 2^{2n}} + \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n! + 1}}$$

e

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left(y_n + \frac{5}{y_n} \right), \quad y_1 = 1$$

Determine o limite da sucessão v_n

Resolução. Tem-se

$$\frac{2^{n+5} - 3^n}{3^{n+1} + 2^{2n}} = \frac{2^{-n+5} - (3/4)^n}{3(3/4)^n + 1} \rightarrow \frac{0 - 0}{3 - 0 + 1} = 0$$

e

$$\frac{\frac{(n+3)!}{(n+1)!+1}}{\frac{(n+2)!}{n!+1}} = \frac{(n+3)!}{(n+2)!} \frac{n!+1}{(n+1)!+1} =$$

$$\frac{1+3n^{-1}}{1+n^{-1}} \frac{1+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{(n+1)!}} \rightarrow \frac{1+0}{1+0} \frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n!+1}} \rightarrow 1$$

Logo $x_n \rightarrow 0 + 1 = 1$. Então, como $y_n = v_n - x_n$, y_n é uma sucessão convergente. Sendo $a \in \mathbb{R}$ o seu limite, $y_{n+1} \rightarrow a$ pois é uma subsucessão de y_n . Aplicando limites a ambos os termos da igualdade que define, por recorrência, y_n , tem-se, visto que todas as sucessões envolvidas são convergentes,

$$a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{5}{a} \right) \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{5}$$

Como $y_1 > 0$ e $y_n > 0 \Rightarrow y_{n+1} > 0$, y_n é, por indução, uma sucessão de termos positivos. Assim, o seu limite não pode ser negativo e $a = \sqrt{5}$. Conclui-se, assim, que $v_n \rightarrow 1 + \sqrt{5}$

4^a Ficha de problemas

Funções reais de variável real. Continuidade e limites.

1. Considere a função $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x-2}{x+1}$$

- a) Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

- b) Mostre que f é estritamente crescente e indique, justificando, se é majorada ou minorada e se tem máximo ou mínimo em $]-1, 1[$.
- c) Se x_n for uma sucessão com termos em $]-1, 1[$, convergente para 1, qual será o limite de $f(x_n)$? Justifique.
- d) Dê um exemplo de uma sucessão y_n , de termos em $]-1, 1[$, tal que a sucessão $f(y_n)$ não seja limitada.

2. Mostre, usando a definição de limite, que $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})) = 1$

3. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, contínua no ponto 1,

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x) & \text{se } x \geq 1 \\ \operatorname{arcsen}(x) & \text{se } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{se } x \leq -1. \end{cases}$$

- a) Determine a .
- b) Determine $f(\frac{4}{\pi} \operatorname{arccos}(-\frac{4}{5}))$ e $f(\cos(\frac{5\pi}{12}))$.
- c) Estude a função f do ponto de vista da continuidade, em cada ponto $x \in \mathbb{R}$. Indique o contradomínio da função f . Indique ainda se a função tem no domínio máximo, mínimo, supremo ou ínfimo e, no caso de existência, indique o valor.
- d) Diga se existem e, no caso de existência, calcule os limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

4. Sendo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua, justifique que:

- a) Não existe qualquer sucessão x_n de termos em $[0, 1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = n$.
- b) Se existe uma sucessão x_n de termos em $[0, 1]$ tal que qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = \frac{1}{n}$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.
5. Seja $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, uma função contínua, verificando a condição $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.
- a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1, 1]$? Justifique.
- b) Determine, justificando, o limite da sucessão $v_n = \operatorname{tg}(f(u_n))$, em que $u_n = \frac{1-n}{n}$.

5^a Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade.

-
1. Defina a derivada das seguintes funções, definidas em \mathbb{R} :

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}, \quad b) g(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}, \quad c) h(x) = x \operatorname{sen}(x^2).$$

2. Determine, conhecendo as derivadas das funções tangente e seno, as derivadas das funções:

$$a) h_1(x) = \operatorname{arctg} x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad b) h_2(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

3. Determine a derivada para cada uma das seguintes funções:

$$a) e^{\operatorname{arctg} x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad b) (\ln x)^x, \quad x \in]1, +\infty[\quad c) x^{x^{x-1}}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

4. Seja a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{arctg}(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Sendo $a < 0$ e $b > 0$, calcule $f'(a)$ e $f'(b)$ e escreva equações das tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissa a e b .
b) Justifique que $f'(0) = 1$.
c) Utilize os resultados de a) e b) para justificar que f não tem extremos locais.

5. Considere a função f definida em \mathbb{R} , contínua no ponto 0 e tal que

$$f(x) = \frac{x}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad \forall x \neq 0$$

Determine as derivadas laterais de f no ponto 0.

6. Seja a função definida por $y = \sqrt{\operatorname{ch} x - 1}$. Indique para a função referida o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada.
Determine as derivadas laterais em 0.

7. Determine o domínio, o domínio de diferenciabilidade e a função derivada das funções:

$$a) \ln(x \operatorname{sh} x); \quad b) \operatorname{arcsen}(\operatorname{arctg} x); \quad c) \frac{e^x}{1+x}; \quad d) \ln(\operatorname{arcsen}(\frac{x+1}{x-1}))$$

8. Sejam a, b reais e f uma função contínua em $[a, b]$ duas vezes diferenciável em $]a, b[$. Suponha que o gráfico de f e o segmento de recta de extremos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ se intersectam um ponto $(x_0, f(x_0))$ com x_0 pertencente a $]a, b[$. Mostre que existe c pertencente a $]a, b[$ tal que $f''(c) = 0$.

6^a Ficha de problemas

Funções reais. Diferenciabilidade

1. Determine os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 5^x}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{\operatorname{sen} x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} \quad d) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$$

2. Calcule

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2 e^{\ln^2 x}} \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{coth} x}$$

3. Seja $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2) + 1$

- Determine o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de x .
- Determine um majorante para o erro que se comete em $[-1/2, 1/2]$ ao aproximar f pelo polinómio indicado em a).

4. Prove que se $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é três vezes diferenciável e se $g'''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então g não pode ter mais do que dois pontos de extremo local. Admitindo agora que g tem de facto extremos locais em α e β , com $\alpha < \beta$, indique se $g(\alpha)$ e $g(\beta)$ são máximos ou mínimos da função. Justifique.

Escreva a fórmula de Taylor para g e com resto de Lagrange de segunda ordem e aproveite-a para mostrar que $g(x) > g(\beta)$ para $x > \beta$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|e^{1-x^2}$

- Estude a função f do ponto de vista da continuidade e da diferenciabilidade. Em cada ponto em que f não seja diferenciável, calcule as derivadas laterais.
- Complete o estudo da função f , considerando em particular os aspectos seguintes: crescimento, extremos, concavidade, inflexões e assíntotas. Esboce o gráfico da função f .

Exercícios resolvidos

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

- i) Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ a função é contínua no ponto 1.
- ii) Sendo $\alpha = \frac{4}{\pi}$, determine a função derivada de f .
- iii) Verifique que f é uma função crescente. Determine, justificando, o seu contradomínio.

Resolução.

- i) Como f está definida à esquerda e à direita do ponto 1 por expressões diferentes, f é contínua nesse ponto sse existirem e forem iguais os limites laterais $f(1^-)$ e $f(1^+)$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \alpha \operatorname{arctg} x = \alpha \operatorname{arctg} 1 = \alpha \frac{\pi}{4} \\ f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Logo f é contínua em 1 sse $\alpha \frac{\pi}{4} = 1$ isto é sse $\alpha = \frac{4}{\pi}$.

- ii) Comece-se por notar que f é diferenciável em todos os pontos $x \neq 1$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com o produto ou a composta de funções diferenciáveis em todo o seu domínio (neste caso a exponencial, o arco-tangente e funções polinomiais). Assim sendo, podem aplicar-se as regras de derivação e obtém-se (sempre para $x \neq 1$ e $\alpha = \frac{4}{\pi}$):

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{(x)'}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \\ (x-1)' e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Falta verificar se existe derivada em 1. Como, novamente, a função é definida por expressões diferentes à esquerda e à direita do ponto, f é diferenciável em

1 sse $f'_e(1) = f'_d(1)$. Tem-se (note-se que $f(1) = 1$)

$$\begin{aligned} f'_e(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1 \\ f'_d(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x - 1}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{\frac{4}{\pi} y - 1}{\operatorname{tg} y - 1} = \frac{4}{\pi} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{y - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} y - 1} = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_{y=\frac{\pi}{4}}} = \frac{\frac{4}{\pi}}{\cos^{-2}(\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

em que o primeiro limite é um limite notável e no segundo limite se fez a mudança de variável $y = \operatorname{arctg} x$ e se reconheceu o inverso do limite que dá a derivada da função $\operatorname{tg} y$ no ponto $\frac{\pi}{4}$. Então f não é diferenciável no ponto 1 e a derivada de f é definida por

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 1 \\ e^{x-1} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

- iii) Como $\frac{4}{\pi} \frac{1}{1+x^2} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, f' é positiva em $]1, +\infty[$ e, como f é contínua em 1, f é crescente em $[1, +\infty[$. Por outro lado, como $e^{x-1} > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, f' é positiva em $] -\infty, 1[$ e, como f é contínua em 1, f é crescente em $] -\infty, 1]$. Então, f é crescente em \mathbb{R} . Assim sendo, tendo em conta que as desigualdades anteriores são estritas e, portanto f é estritamente crescente, $f(\mathbb{R}) =]f(-\infty), f(+\infty)[$. Tem-se, ainda,

$$\begin{aligned} f(+\infty) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x = \frac{4}{\pi} \frac{\pi}{2} = 2 \\ f(-\infty) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0 \end{aligned}$$

e, portanto, o contradomínio de f é $f(\mathbb{R}) =]0, 2[$.

Sendo $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right)$$

- i) Escreva o polinómio de Taylor de 2º grau em potências de $x + 1$ associado à função f .
- ii) Determine

$$\int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx$$

Resolução.

- i) Dado que é a composta de um arctg com uma função racional, a função f é pelo menos 2 vezes diferenciável numa vizinhança do ponto -1 .

O polinómio de Taylor de 2º grau, $p_2(x)$, em potências de $x + 1$ associado à função f , define-se a partir do teorema de Taylor por:

$$P_2(x) = f(-1) + f'(-1)(x + 1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x + 1)^2$$

com

$$f(-1) = \frac{\pi}{4},$$

$$f'(-1) = \left(\arctg \frac{1}{x} \right)'_{x=-1} = \left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right)_{x=-1} = \left(\frac{-1}{x^2 + 1} \right)_{x=-1} - \frac{1}{2},$$

$$f''(-1) = \left(-\frac{1}{1 + x^2} \right)'_{x=-1} = \left(\frac{2x}{(1 + x^2)^2} \right)_{x=-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{i.e. } P_2(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{(x+1)}{2} - \frac{(x+1)^2}{4}.$$

- ii) Usando o método de integração por partes e fazendo $u' = 1$ e $v = \arctg \frac{1}{x}$ vem $u = x$, $v' = \frac{-1}{x^2+1}$ e

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx &= \left[x \arctg \frac{1}{x} \right]_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{-x}{1 + x^2} dx \\ &= (\sqrt{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} - \arctg 1) + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{1 + x^2} dx = \\ &= \left(\sqrt{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \left[\frac{\ln(1 + x^2)}{2} \right]_1^{\sqrt{3}} = \\ &= \left(\sqrt{3} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 2) = \frac{\pi}{12} (2\sqrt{3} + 3) + \ln \sqrt{2} \end{aligned}$$

Considere a função definida em \mathbb{R} pela expressão

$$F(x) = \begin{cases} (x-1) \ln|x-1| & \text{se } x \leq 0 \\ \arctg \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- i) Determine o domínio de diferenciabilidade de F e calcule F' .
- ii) Determine os intervalos de monotonia, os extremos e o contradomínio da função F .
- iii) Considere a sucessão $w_n = 1 + 2^{-n}$. Determine o limite da sucessão $F(w_n)$.
- iv) A função F restrita a $]0, +\infty[$ é invertível? Justifique e, em caso afirmativo, determine a derivada da função inversa em $F(1)$.
- v) Justifique que existe $c \in]1, 3[$ tal que $F'(c) = -\pi/24$.

Resolução.

- i) F é diferenciável em $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ pois coincide numa vizinhança de qualquer desses pontos com a composta e o produto de funções diferenciáveis nos pontos correspondentes (neste caso, funções racionais cujos denominadores não se anulam, função logaritmo, função módulo cujo argumento não se anula, função arco-tangente e função raíz quadrada cujo argumento não se anula).

1^a Resolução Para saber se F é diferenciável na origem calculam-se as derivadas laterais usando a definição:

$$F'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1) \ln|x-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) \frac{\ln(1-x)}{-x} = (1-0).1 = 1$$

usando o limite notável $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ e

$$F'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctg \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2}}{x} \lim_{y \rightarrow \pi/2^-} \frac{y - \pi/2}{\cotg^2 y} = \frac{1}{-2 \cotg y \sen^{-2} y} \Big|_{y=\pi/2} = -$$

fazendo a mudança de variável $y = \arctg \sqrt{\frac{1}{x}}$ e reconhecendo o limite assim obtido como o inverso do limite que define a derivada da função $\cotg^2 y$ no ponto $y = \pi/2$. Como F tem uma derivada lateral infinita na origem não é diferenciável na origem e o seu domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sendo

a sua derivada definida, nesse conjunto, através das regras de derivação:

$$F'(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{1+(x^{-1/2})^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \ln(1-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

2^a Resolução Em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ podem-se usar as regras de derivação, obtendo:

$$F'(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}{1+(x^{-1/2})^2} & \text{se } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \ln(1-x) + 1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Como $F(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) \ln|x-1| = 0 = F(0)$ e $F(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctg \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} = \pi/2 - \pi/2 = 0$, F é contínua na origem. Tem-se, ainda

$$F'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2x^{1/2}(x+1)} = -\infty$$

e

$$F'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1-x) + 1 = 1$$

Assim, pelo Teorema de Lagrange, como F é contínua em $[-\epsilon, \epsilon]$ e diferenciável em $]-\epsilon, \epsilon[$, para algum $\epsilon > 0$, e existem os limites laterais $F'(0^+)$ e $F'(0^-)$, tem-se que $F'_d(0) = F'(0^+) = -\infty$ e $F'_e(0) = F'(0^-) = 1$ logo F não é diferenciável na origem. Então o domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e F' está definida, nesse conjunto, pela expressão obtida pelas regras de derivação.

- ii) Pela alínea anterior, $F'(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}^+$ e $F'(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}^-$. Logo, dado que F é contínua na origem, F é estritamente decrescente em $[0, +\infty[$ e estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e tem um máximo na origem com $F(0) = 0$ que é o único extremo da função. Como

$$F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \sqrt{\frac{1}{x}} - \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) \ln|x-1| = -\infty(+\infty) = -\infty$$

tem-se que, pelo estudo da monotonía apresentado, o contradomínio de F é $F(\mathbb{R}) = F(\mathbb{R}_0^-) \cup F(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0] \cup]-\frac{\pi}{2}, 0[=]-\infty, 0]$.

- iii) Como $w_n = 1 + 2^{-n} \rightarrow 1 + 0 = 1$ e F é contínua em 1, visto que é diferenciável nesse ponto (alínea (i)), o limite da sucessão $F(w_n)$ é $\lim F(w_n) = F(1) = \arctg(1) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

- iv) Pela alínea (ii), F é estritamente decrescente em $]0, +\infty[$ logo é injectiva nesse intervalo e, portanto, F restrita a esse intervalo é invertível. Pelo teorema da derivada da função inversa tem-se, sendo G a inversa dessa restrição,

$$G'(F(1)) = \frac{1}{F'(G(F(1)))} = \frac{1}{F'(1)} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

- v) Pela alínea (i), F é contínua em $[1, 3]$ e diferenciável em $]1, 3[$ pois é diferenciável em \mathbb{R}^+ . Então pelo teorema de Lagrange existe um $c \in]1, 3[$ tal que

$$F'(c) = \frac{F(3) - F(1)}{3 - 1} = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{3}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{1}}}{2} = \frac{\pi/6 - \pi/4}{2} = -\frac{\pi}{24}$$

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em \mathbb{R} . Suponha que f é par e que existe, em \mathbb{R} , o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

- Mostre que f é limitada em \mathbb{R} .
- Supondo adicionalmente que a função satisfaz

$$f(n+1) = \frac{f(n)}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

mostre que, necessariamente, se tem que verificar $L = 0$.

Resolução.

- Como f é diferenciável em \mathbb{R} é contínua em \mathbb{R} e, portanto, limitada em qualquer intervalo limitado. Por outro lado, como $f(+\infty) = L$, qualquer que seja $\delta > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \in]L - \delta, L + \delta[$ para $x > \frac{1}{\epsilon}$. Por simetria, visto que f é par, $f(x) \in]L - \delta, L + \delta[$ para $x < -\frac{1}{\epsilon}$. Então f é limitada em \mathbb{R} .
- Como existe $f(+\infty) = L$, pela definição de limite segundo Heine, existem e têm o mesmo valor os limites das sucessões $f(n+1)$ e $f(n)$. Aplicando limites a ambos os membros da igualdade, visto que tratarem de sucessões convergentes e $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, tem-se

$$\lim f(n+1) = \lim \frac{f(n)}{2^n} \Leftrightarrow L = 0$$

7^a Ficha de problemas

Primitivação

1. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando os domínios correspondentes:

$$\begin{aligned}
 a) \frac{2}{\sqrt{x}} & , \quad b) \frac{x\sqrt{x}}{2} & , \quad c) \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} & , \quad d) \frac{2}{1-2x} \\
 e) \frac{1}{4+x^2} & , \quad f) \cos^3 x \sen^2 x & , \quad g) \frac{1}{\sen^2 2x} & , \quad h) \left(\frac{1}{2x-1}\right)^2 \\
 i) \cotg x & , \quad j) \tg^5 x & , \quad k) \frac{x+1}{x^2+1} & , \quad l) \sen x \sqrt{1-\cos x} \\
 m) \frac{(\arctg x)^4}{x^2+1} & , \quad n) \frac{x^2}{x^2+2} & , \quad o) \frac{2x^4-3x^2+1}{3x^2} & , \quad q) \frac{2x+3}{2x+1} \\
 r) \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & , \quad s) \frac{4x}{x^4+1} & , \quad t) \frac{1}{x \ln x^2} & , \quad u) x \sqrt{1+x^2} \\
 v) \frac{e^x}{1+e^x} & , \quad x) e^{\cos^2 x} \sen 2x & , \quad y) \frac{e^x}{4+e^{2x}} & , \quad z) \frac{x}{\sqrt{1-2x^4}}
 \end{aligned}$$

2. Determine a função f que verifica as seguintes condições: $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$, $f(e+1) = 0$ e $f'(0) = 0$
3. Usando o método de primitivação por partes, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, indicando os domínios correspondentes:

$$\begin{aligned}
 a) x \cos 2x & , \quad b) \ln 2x & , \quad c) \arctg x & , \quad d) x^3 \ch x \\
 e) \arcsen^2 x & , \quad f) x \cos x \sen x & , \quad g) \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 & , \quad h) \cos(\ln x) \\
 i) x^2 \ln x & , \quad j) x^2 e^{2x} & , \quad k) \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} & , \quad l) 2x \arctg x
 \end{aligned}$$

8^a Ficha de problemas

Integral de Riemann

1. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad , \quad b) \int_{e^1}^{e^e} \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx \quad , \quad c) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} x \cotg(x^2) dx \quad ,$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 x e^{2x} dx \quad , \quad b) \int_0^1 \arctg(x) dx \quad , \quad c) \int_1^e \ln^2(x) dx \quad ,$$

3. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4}{x^2 - 1} dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{x + 1}{x^3 + 2x^2} dx \quad , \quad c) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x^3 - 1} dx \quad , \quad d) \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad ,$$

4. Justifique a diferenciabilidade de cada uma das seguintes funções e calcule as respectivas derivadas.

$$a) \int_x^0 e^{4t^2} dt \quad , \quad b) \int_0^{\cos x} e^{t^2 + 2x} dt \quad , \quad c) \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(1 + t^2)} dt$$

5. Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1 + t^2)^2} \ln(t) dt.$$

a) Calcule $\varphi(2)$.

b) Justifique que φ é diferenciável em \mathbb{R}^+ e calcule $\varphi'(x)$, para $x > 0$.

c) Estude φ quanto à monotonía e verifique que existe um e um só ponto $c > 0$ tal que $\varphi(c) = 0$.

10^a Ficha de problemas

Integral de Riemann e aplicações

1. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1} + 2}{8 + \sqrt{(x+1)^3}} dx \quad , \quad b) \int_1^2 \frac{1}{e^{2x} - 1} dx \quad , \quad c) \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 3 \ln x + 2)} dx \quad ,$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$a) \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx \quad , \quad b) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + 4x^2} dx \quad , \quad c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + \cos x + 1} dx \quad ,$$

3. Determine as áreas das regiões planas de \mathbb{R}^2 limitadas pelas curvas

- i) $y = \ln x, y = 1 - x, y = 1.$
- ii) $y = x^2 - \pi^2/4, y = \cos x.$

4. Determine a área dos subconjuntos de \mathbb{R}^2

- i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2 \wedge 0 \leq y \leq x \cos x\}.$
- ii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq [(x+3)\sqrt{x+2}]^{-1}\}.$

Exercícios resolvidos

Determine o valor dos integrais

i)

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

ii)

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

iii)

$$\int_1^e x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx$$

iv)

$$\int_0^1 2x \operatorname{arctg} x dx$$

Resolução.

- i) Dado que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, a função integranda é imediatamente primitivável e, usando a fórmula de Barrow, tem-se

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} (\ln x)^2 dx = \left[\frac{\ln^3 x}{3} \right]_1^e = \frac{\ln^3 e}{3} - \frac{\ln^3 1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- ii) Através da fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} dx = \left[\frac{\operatorname{arcsen}(x^2)}{2} \right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{12}$$

- iii) Usando o método da integração por partes e fazendo $u' = x$ e $v = \ln(1 + \frac{1}{x})$ vem $u = \frac{x^2}{2}$, $v' = \frac{-1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}$ e

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{-1}{x(x+1)} dx = \\ &= \frac{e^2}{2} \ln \frac{e+1}{e} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \int_1^e \frac{x}{x+1} dx \end{aligned}$$

Efectuando a divisão inteira entre os polinómios da última fracção vem $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$ logo

$$\begin{aligned}
 \int_1^e x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx &= \frac{e^2}{2} \ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} \int_1^e 1 - \frac{1}{x+1} dx \\
 &= \frac{e^2}{2} \ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|x+1| \right]_1^e \\
 &= \frac{e^2}{2} \ln(e+1) - \frac{e^2}{2} - \frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{e}{2} - \frac{\ln(e+1)}{2} \right] - \left[\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} ((e^2 - 1) \ln(e+1) - e^2 + e - 1).
 \end{aligned}$$

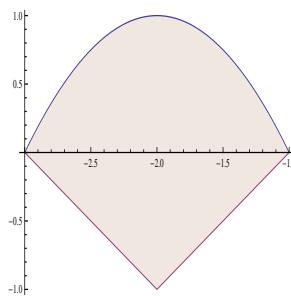
iv) Usando o método de integração por partes e fazendo $u' = 2x$ e $v = \arctg x$ vem $u = x^2$, $v' = \frac{1}{1+x^2}$ e

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 2x \arctg x dx &= [x^2 \arctg x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} + [-x + \arctg x]_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{4} + (-1 + \arctg 1) - (\arctg 0) = \frac{\pi}{2} - 1.
 \end{aligned}$$

Determine a área da região limitada pelas linhas, definidas por:

$$y = -x^2 - 4x - 3, \quad y + 1 = |x + 2|$$

Resolução.



Para $x > -2$, $|x + 2| = x + 2$ e $-x^2 - 4x - 3 = (x + 2) - 1 \Leftrightarrow x = -1$, logo as linhas interseparam-se em $(-1, 0)$. Sendo a região acima representada simétrica relativamente a $x = -2$, a sua área é obtida por:

$$\begin{aligned}
2 \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) - [(x+2) - 1] dx &= 2 \int_{-2}^{-1} -x^2 - 5x + 2 dx = \\
&= 2 \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{-1} = \frac{43}{3}
\end{aligned}$$

Determine o valor dos integrais:

$$(i) \int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx \quad (ii) \int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx$$

Resolução. (i) Determine-se uma primitiva, usando o método de primitivação por partes e a primitivação por decomposição

$$\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x^2}{3} (\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2x}{3} (\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^2}{3} (\sqrt{1+x^2})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} (\sqrt{1+x^2})^{\frac{5}{2}}$$

pela fórmula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx = \left[x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3} \sqrt{1+x^2} \right]_0^1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

(ii) A função integranda é uma função racional que se decompõe em frações simples

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^3 + 3x^2 + 2x} dx &= \int_1^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} dx = A \int_1^2 \frac{1}{x+1} dx + B \int_1^2 \frac{1}{(x+2)} dx = \\
&= A[\ln(x+1)]_0^1 + B[\ln(x+2)]_1^2.
\end{aligned}$$

A determinação das constantes A, B é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

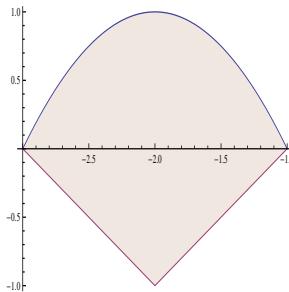
$$x-1 = (A+B)x + (2A+B)$$

Tem-se $A = -2$, $B = 3$ concluindo-se que:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{(x+1)(x+2)} dx = \ln\left(\frac{25}{24}\right).$$

Determine a área da região plana $D \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas

$$y = \operatorname{sh} x, \quad y = 0 \quad \text{e} \quad x = \frac{e - e^{-1}}{2}.$$



Resolução. As linhas $y = 0$, $y = \operatorname{sh} x$ intersetam-se em $(0, 0)$. Sendo a área da região obtida por:

$$\int_0^{\frac{e - e^{-1}}{2}} \operatorname{sh} x \, dx = [\operatorname{ch} x]_0^{\operatorname{sh} 1} = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} 1) - 1.$$

Seja $\phi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(x) = \int_1^{\ln x} x e^{t^2} \, dt.$$

i) Defina, se existirem, as funções ϕ' e ϕ'' .

ii) Determine

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x} + \lim_{x \rightarrow e} \frac{\phi(x)}{x - e}$$

Resolução.

i) A função $F(x) := \int_1^x e^{t^2} \, dt$ é um integral indefinido de uma função contínua em \mathbb{R} e portanto diferenciável em \mathbb{R} , pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Como $\phi(x) = x \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt = x F(\ln x)$ é resulta da composição e produto de funções diferenciáveis em $[1, +\infty[$ será também diferenciável em $[1, +\infty[$. A sua derivada é dada por:

$$\phi'(x) = x(\ln x)' e^{(\ln x)^2} + \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt = x e^{(\ln x)^2} + \int_1^{\ln x} e^{t^2} \, dt,$$

pela regra da derivada do produto e pelo Teorema Fundamental do Cálculo. Por sua vez, ϕ' é a soma de duas funções diferenciáveis em $[1, +\infty[$ e portanto diferenciável em $[1, +\infty[$ tendo-se:

$$\phi''(x) = \frac{2 \ln x e^{(\ln^2 x)}}{x} + \frac{e^{(\ln^2 x)}}{x} = \frac{e^{(\ln^2 x)}}{x} (2 \ln x + 1).$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x} = 0^0 \text{ (indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln x}} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ (ind.)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(1 - \cos x))'}{(\ln x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{1 - \cos x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x) \frac{x}{\sin x} = 2.1 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x) \frac{x \sin x}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \cos x) \frac{x}{\sin x} = 2.1 \end{aligned}$$

Tem-se, finalmente, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x)^{1/\ln x} = e^2$.

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\phi(x)}{x - e} = \frac{\int_1^1 e \cos(t^2) dt}{0} = \frac{0}{0} \text{ (ind.)}$$

Da regra de Cauchy

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\phi(x)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\phi'(x)}{(x - e)'} = \lim_{e^{(\ln^2 x)} + \int_1^{\ln x} e^{t^2} dt} 1 = e$$

$$\text{Assim } \lim_{x \rightarrow e} \frac{\phi(x)}{x - e} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/\sqrt{x}} = \cos 1 + 1.$$

i) Determine, utilizando a mudança de variável $\sqrt{x} = t$, o integral

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x}) dx.$$

ii) Indique uma solução da equação

$$(h(x))^2 = 2 \int_0^x h(t) dt + \int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x}) dx.$$

em que $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável que não se anula em $]0, 1[$.

Resolução.

- i) Aplicando o método de integração por substituição,
 $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = \varphi(t) = t^2$

$$\int_0^{\pi^2/4} \sin(\sqrt{x}) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin t \cdot 2t \, dt =$$

integrando por partes,

$$= 2 \left([-t \cdot \cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt \right) = 2 [\sin t]_0^{\pi/2} = 2$$

- ii) Tem-se

$$2h(x)h'(x) = 2h(x) \Leftrightarrow 2h(x)(h'(x) - 1) = 0$$

Como de $h'(x) - 1 = 0$, deduz-se que $h(x) = x + C$,

$$(x + C)^2 = 2 \int_0^x (t + C) \, dt + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2Cx + C^2 = [t^2/2 + Ct]_0^x + 2$$

donde $C = \sqrt{2}$.

11^a Ficha de problemas

Séries numéricas

1. Estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2 + \cos(n\pi)} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^3+1}} \quad ,$$

2. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-e}{e^n} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{3^n n!} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad ,$$

3. Estude a natureza das seguintes séries numéricas e determine o valor da soma de uma das séries:

$$a) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^{(n-1)}}{5^n} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2+n} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \quad ,$$

4. Sendo $a_n > 0$ e $a_n \rightarrow +\infty$, estude a natureza das seguintes séries numéricas:

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + a_n}$$

5. Sendo $a_n > 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ convergente, mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$$

é também convergente.

12^a Ficha de problemas

Séries numéricas e séries de potências

1. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. Determine a sua soma.
2. Estude a natureza de cada uma das séries seguintes. Verifique se a convergência é absoluta.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n^4}{e^n + n^3}$$

3. Determine o maior intervalo aberto onde são convergentes as séries

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}} x^n \quad , \quad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-3x)^{2n}}{5^n(n+1)}$$

4. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(1-n)}(x+1)^{n+2}$, $x \in \mathbb{R}$
 - Determine o intervalo de \mathbb{R} , onde a convergência da série é absoluta
 - Determine a soma da série quando $x = 0$.

Exercícios resolvidos

Analise a natureza das séries numéricas e em caso de convergência determine a soma de uma delas.

$$i) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}} \quad ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{6^{n+1}} \quad iii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Resolução.

i) As sucessões $a_n = \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}$ e $b_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ têm o mesmo comportamento quando $n \rightarrow +\infty$. Uma vez que

$$\lim \frac{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}}{\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^2}}} = \lim \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n} + 1}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+n^2}}$$

é uma série divergente pelo critério de comparação, já que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série divergente, pois é uma série de Dirichlet, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, com $p \leq 1$.

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{6^{n+1}} = 1/6 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

é uma série geométrica de termos positivos convergente uma vez que tem razão, $2/3$, de módulo inferior a um. O valor da sua soma é :

$$1/6 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1/6 \frac{2/3}{1 - 2/3} = \frac{1}{3}$$

iii) Do critério de D'Alembert, uma vez que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+2)! \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot (2n)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim \frac{(2 + \frac{2}{n})(2 + \frac{1}{n})}{(1 + \frac{1}{n})^2} = 4 > 1,$$

a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ é divergente.

Determine $a \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} = 3.$$

Resolução. A série é uma série geométrica convergente de razão $\frac{3}{4}$,

$$\sum_{n=a}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{2^{2n-2}} = \frac{4}{3} \sum_{n=a}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{4}{3} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^a}{1 - \frac{3}{4}}.$$

onde

$$\frac{16}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^a = 3 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^a = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

resultando $a = 2$.

(i) Analise a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sqrt{n}}{n + 1} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n}$$

(ii) Determine um número real que seja majorante do módulo da soma de uma das séries anteriores.

Resolução.

i) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{3+\sqrt{n}}{n+1}$ e $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Tem-se

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{3}{\sqrt{n}} + 1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1/2 < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sqrt{n}}{n + 1}$ é também divergente.

A série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n} \right| = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e} \right)^n$$

é uma série geométrica convergente de razão $\frac{2}{e} < 1$, sendo a série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n}$ consequentemente absolutamente convergente.

ii)

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)2^{n+1}}{e^n} \right| \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{e} \right)^n = \frac{2e}{e-2}$$

(i) Determine o intervalo de \mathbb{R} onde a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+1)(n+2)}$$

é absolutamente convergente.

(ii) Indique a soma da série em $x = 1$.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} = \lim \frac{n+3}{n+1} = 1$$

Assim série converge absolutamente se $|x-2| < 1$ i.e $1 < x < 3$.

Para $x = -3$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

é uma série de Mengoli convergente, pois a sucessão $u_n = \frac{1}{n+1}$ é convergente.

Para $x = -1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)} \right|$$

é uma série absolutamente convergente.

ii) Sendo uma série de Mengoli convergente a sua soma é $1/2$, uma vez que, considerando a sucessão das somas parciais S_m , tem-se

$$S_m = \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \left(1/2 - \frac{1}{m+2} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1/2$$

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série de termos positivos divergente e $s_n = b_1 + \dots + b_n$ a sua sucessão das somas parciais. Conclua, justificando, qual a natureza da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{s_n^2}$$

Sugestão: Mostre que $\frac{b_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$

Resolução. Tem-se

$$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{b_n}{s_n s_{n-1}}$$

Como $s_n s_{n-1} \leq s_n^2$ já que $b_n > 0$. Assim $\frac{b_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} \right)$ é uma série de Mengoli convergente, pois tem-se $v_n = \frac{1}{s_n} \rightarrow 0$. Consequentemente pelo critério geral de comparação, conclui-se que a série dada é convergente.