Capítulo 5

Séries numéricas e séries de potências

Inicia-se o capítulo com a definição de série numérica e com a noção de convergência de séries numéricas, indicando-se exemplos, em particular o exemplo da série geométrica. Considerando séries numéricas com termos não negativos e não positivos estabelece-se uma condição necessária de convergência e o critério de Cauchy bem como as suas consequências imediatas. Estabelecem-se para séries de termos não negativos critérios de convergência. Estabelece-se o critério de comparação, o critério da razão e o critério da raiz. Define-se série absolutamente convergente e analisa-se a consequência deste conceito na análise da natureza de séries de termos reais. Aborda-se sumariamente a determinação aproximada da soma de uma série convergente. Introduz-se o conceito de série de potências. Estabelecem-se para estas séries condições de convergência e indica-se, quando possível, expressões para a sua soma.

5.1 Série numérica. Definição. Exemplos.

Procurando estender a noção de adição a um número infinito de parcelas e atribuir significado ao símbolo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

em que a_n é uma sucessão de termos reais é natural pensar na sucessão de termos reais

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n\,.
\end{aligned}
$$

Nem sempre é possível contudo atribuir significado ao símbolo considerado mas, se a sucessão s_n convergir naturalmente

$$\lim_n s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Definição 5.1.1. *Sejam as sucessões de termos reais a_n e $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Designa-se por série numérica o objecto matemático definido pelo par ordenado (a_n, s_n)*

A série numérica por simplicidade representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que a sucessão a_n é designada por sucessão dos termos da série e a sucessão s_n é designada por sucessão das somas parciais. Note-se que as duas sucessões a_n e s_n são determinadas uma pela outra

$$
\begin{array}{lcl}
a_n & - - - \to & s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
s_n & - - - \to & a_n = s_n - s_{n-1}
\end{array}
$$

Definição 5.1.2. *A série numérica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma série convergente(divergente) se e só se a sucessão s_n é uma sucessão convergente(divergente).
Se a série é convergente a soma da série é o limite da sucessão s_n i. e.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_n s_n$$

Teorema 5.1.3. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente então a sucessão* a_n *é um infinitésimo*

Demonstração. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente se e só se a sucessão $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ é convergente. Tem-se

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n.$$

Ora sendo s_n uma sucessão convergente, uma vez que s_{n+1} é uma subsucessão de s_n,

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$$

■

Exemplo 5.1.4. *Seja a série geométrica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1}, \qquad\qquad a \in \mathbb{R}$$

Analise-se para que valores de $r \in \mathbb{R}$ *a série é convergente.*

• $r = 1$

$$s_n = a + a + \ldots + a = n.a$$

A série é divergente pois s_n é uma sucessão divergente.

• $r \neq 1$

$$s_n - r.s_n = a(1 - r_n) \quad \Rightarrow \quad s_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad r > 1 \\ 0 & \text{se} \quad |r| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se} \quad r \leq -1. \end{cases}$$

tem-se que a sucessão s_n converge se e só se $|r| < 1$. Consequentemente a série geométrica indicada é convergente se e só se $|r| < 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a.r^{n-1} = \frac{a}{1 - r}.$$

Exemplo 5.1.5. *Analise-se a convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Tem-se

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{e} \quad s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Ora

$$s_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

consequentemente a sucessão s_n é divergente e a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente. Este exemplo mostra que a condição $a_n \longrightarrow 0$ é uma condição necessária de convergência mas não é condição suficiente, pois $a_n \longrightarrow 0$ e a série é divergente.

Exemplo 5.1.6. *Seja a série de Mengoli*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Analise-se se a série é convergente.

Tem-se

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{e} \quad s_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Ora

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

vindo

$$s_1 = 1 - 1/2$$

$$s_2 = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) = 1 - 1/3$$

$$\vdots$$

$$s_n = (1 - 1/2) + (1/2 - 1/3) + \ldots + (-1/n) + (1/n - 1/(n+1))\,.$$

Assim a sucessão $s_n = 1 - 1/(n+1)$ é uma sucessão convergente que tem como limite 1. A série de Mengoli indicada é pois uma série convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Mais geralmente tem-se a proposição seguinte

Proposição 5.1.7. *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que

$$a_n = u_n - u_{n+1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

e a sucessão u_n são convergentes ou divergentes simultaneamente e em caso de convergência

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}$$

Demonstração. Considere-se a sucessão

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

As sucessões s_n e u_n, atendendo à expressão anterior, têm a mesma natureza. Sendo convergentes

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = u_1 - \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}.$$

■

Conclui-se esta secção com resultados de operações álgebricas envolvendo séries.

Teorema 5.1.8.

i) Sejam

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a''_n,$$

duas séries convergentes de somas respectivamente s' e s''. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, em que $a_n = a'_n + a''_n$, é convergente de soma $s = s' + s''$.

ii) Se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é uma série convergente de soma s, e $b \in \mathbb{R}$. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *em que $b_n = ba_n$ é convergente de soma bs.*

Demonstração.

i) Sejam s'_n e s''_n as sucessões de somas parciais associadas às séries de termos gerais respectivamente a'_n e a''_n.
Tem-se

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n = (a'_1 + a''_1) + \ldots + (a'_n + a''_n) =$$

$$= (a'_1 + \ldots + a'_n) + (a''_1 + \ldots + a''_n) = s'_n + s''_n.$$

Concluindo-se que a sucessão s_n é convergente e

$$s_n \to s' + s'' = s$$

ii) Sendo t_n a sucessão das somas parciais associada à série de termo geral ba_n tem-se

$$b.a_1 + \ldots + b.a_n = b.(a_1 + \ldots + a_n) \to b.s$$

■

Observação 5.1.9.

- *Quando são divergentes as séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$, *a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n),$$

pode divergir ou convergir.

- *Quando uma das séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n$ *ou* $\sum_{n=1}^{+\infty} a''_n$ *converge e a outra diverge a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n + a''_n),$$

diverge.

5.2 Critério de Cauchy. Consequências

Em geral a convergência de uma série não é analisada directamente a partir da sucessão das somas parciais mas recorrendo a critérios de convergência. Analisa-se nesta secção uma condição necessária e suficiente de convergência designada por critério de Cauchy.

Teorema 5.2.1 (Critério de Cauchy). *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é convergente se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon$$

Demonstração.

A série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se a sucessão $s_n = a_1 + \ldots + a_n$ é uma sucessão convergente. Ora a sucessão s_n é uma sucessão convergente se e só se a sucessão s_n é uma sucessão de Cauchy. Por outro lado s_n é uma sucessão de Cauchy se e só se

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |s_r - s_q| < \epsilon$$

Atendendo a que

$$s_r - s_q = a_{q+1} + \ldots + a_r.$$

tem-se assim o critério de Cauchy. ■

Observação 5.2.2. *A condição necessária de convergência $a_n \to 0$ pode obter-se a partir deste critério:*

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{p\in\mathbb{N}}{\exists}\quad r \geq q > p \ \Rightarrow\ |a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon \underset{r=q+1}{\Rightarrow} |a_{q+1}| < \epsilon$$

Exemplo 5.2.3. *Analise-se se a série harmónica,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

é uma série divergente

Tem-se para $r = 2q$ que

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{2q} \geq \frac{1}{2q} + \ldots + \frac{1}{2q} = \frac{1}{2}$$

Assim pelo critério de Cauchy a série é divergente.

Corolário 5.2.4. *As séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

em que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$, $a_n = b_n$, são da mesma natureza (a natureza da série não depende dos p primeiros termos)

Exemplo 5.2.5. *Têm a mesma natureza as séries numéricas*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$2 + 3 + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots = 2 + 3 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

São ambas séries convergentes ainda que com somas diferentes.

Corolário 5.2.6. *A natureza de uma série não é alterada se for suprimido um número finito arbitrário de termos i.e. para $p \in \mathbb{N}$ as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

em que $b_n = a_{n+p}$, são da mesma natureza.

Exemplo 5.2.7. *São séries simultaneamente divergentes as séries:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+2} + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$$

5.3 Critérios de convergência para séries de termos não negativos

Teorema 5.3.1. *Sendo $a_n \geq 0$ a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

é convergente se e só se a sucessão das somas parciais é majorada.

Demonstração. A sucessão

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$$

é uma sucessão crescente já que, como $a_{n+1} \geq 0$,

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \,.$$

Ora uma sucessão s_n crescente é convergente se e só se é majorada. ■

Teorema 5.3.2 (Critério geral de comparação)**.** *Seja*

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

i) Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série convergente então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente.

ii) Se $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série divergente então $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série divergente.

Demonstração.

i) Sejam as sucessões das somas parciais

$$s_n = a_1 + \ldots + a_n, \quad \text{e} \quad t_n = b_1 + \ldots + b_n.$$

Como $0 \leq a_n \leq b_n$ tem-se $s_n \leq t_n$. Ora sendo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ uma série convergente do teorema 5.3.1, t_n é uma sucessão majorada consequentemente a sucessão s_n é uma sucessão majorada concluindo-se que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente.

ii) Tendo presente que sendo A, B proposições, $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A}$, tem-se de imediato ii) de i) .

■

Exemplo 5.3.3. *Analise-se a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

A série a analisar tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ora

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad n \in \mathbb{N}$$

em que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é uma série de Mengoli convergente. Do critério geral de comparação tem-se então que a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

é uma série convergente.

Exemplo 5.3.4. *Analise-se a natureza da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$

Uma vez que se tem $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{1/3}}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente a série considerada é uma série divergente.

Mais geralmente tem-se que as *séries de Dirichlet*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

são séries convergentes se $p > 1$ e séries divergentes se $p \leq 1$

Teorema 5.3.5 (Critério geral de comparação na forma de limite)**.** *Sejam* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$*. Então*

i) Se existir o limite em $\mathbb{R}$ *de* a_n/b_n *e for diferente de zero, as séries*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

têm a mesma natureza.

ii) Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é uma série convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente.*

iii) Se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$$

tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *é uma série divergente.*

Demonstração.

i) Seja

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$$

Então

$$\underset{\epsilon\in]0,l[}{\exists} n > p \qquad 0 < l - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon$$

concluindo-se que

$$0 < k_1 < \frac{a_n}{b_n} < k_2$$

em que $k_1 = l - \epsilon$, $k_2 = l + \epsilon$. Assim do critério geral de comparação tem-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e que, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente.

ii) Sendo o limite zero

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} n > p \qquad 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \epsilon \;\Rightarrow\; a_n \leq \epsilon b_n$$

obtendo-se a conclusão do critério geral de comparação.

iii) Sendo o limite $+\infty$

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\, n > p \qquad \frac{a_n}{b_n} \geq \epsilon \;\Rightarrow\; a_n \geq \epsilon b_n$$

obtendo-se a conclusão do critério geral de comparação.

■

Exemplo 5.3.6. *Analise-se a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Sendo

$$a_n = n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{n^{\frac{1}{4}}}{n\sqrt{n+1} + (n+1)\sqrt{n}}$$

tem-se

$$\lim \frac{a_n}{n^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Assim a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série convergente pois tem a mesma natureza que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$, que é uma série de Dirichlet convergente.

Teorema 5.3.7 (Critério da razão)**.** *Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos*

i) Se existe $r < 1$ tal que a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$$

então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

ii) Se a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Demonstração.

i) Seja $b_n = r^n$. A série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge quando $r < 1$. Ora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Assim $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ e a sucessão $\frac{a_n}{b_n}$ é decrescente tendo-se

$$\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_1}{b_1} = k$$

Recorrendo ao critério de comparação, uma vez que $a_n \leq kb_n$, se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente é também convergente $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

ii) Se a partir de certa ordem $a_{n+1} \geq a_n$ então a_n não tende para zero e consequentemente a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ não é convergente.

■

Corolário 5.3.8 (Critério de D'Alembert)**.** *Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos e suponha-se que existe*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

- *Se $l < 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.*
- *Se $l > 1$ a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*
- *Se $l = 1^+$ a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.*

Demonstração.

- Se $l < 1$ escolhido $\epsilon \in]0, 1 - l[$ tem-se a partir de certa ordem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \epsilon < 1$$

vindo do critério da razão que a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

- Nos restantes casos basta verificar que a condição necessária de convergência da série não se verifica.

■

Exemplo 5.3.9. *Considere-se a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}, \qquad a > 1$$

e analise-se se é convergente.

Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$$

concluindo-se pelo critério de D'Alembert que a série é convergente.
Como consequência da convergência da série

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

i.e. quando $n \to +\infty$, a^n é desprezável relativamente a $n!$, $a^n = o(n!)$.

Exemplo 5.3.10. *Considere-se a série* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ *e analise-se se é convergente.*

Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

concluindo-se pelo critério de D'Alembert que a série é convergente.
Como consequência da convergência da série

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

i.e. quando $n \to +\infty$, $n!$ é desprezável relativamente a n^n, $n! = o(n^n)$.

Teorema 5.3.11 (Critério da raiz)**.** *Seja* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

i) Se existe $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem* $\sqrt[n]{a_n} \leq r$ *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

ii) Se a partir de certa ordem $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Demonstração.

i) Se para $n > p$ se tem $a_n \leq r^n$ em que $r < 1$ então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \quad \text{série convergente} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{série convergente.}$$

ii) Se existirem infinitos números naturais tais que $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, a sucessão a_n não é um infinitésimo e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ não converge.

■

Corolário 5.3.12. *Seja* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos e*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = l$$

i) Se $l < 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*

ii) $l > 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

iii) $l = 1$ *nada se pode concluir.*

Exemplo 5.3.13. *Analise-se a convergência da série* $\sum_{n=1}^{+\infty} na^n$

Tem-se

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{na^n} = a$$

concluindo-se pelo critério de Cauchy que a série é convergente se $a < 1$ e divergente se $a > 1$. Para $a = 1$ a série é divergente uma vez que não satisfaz a condição necessária para a convergência de séries.

Observação 5.3.14. *Tem-se*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=1 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

Sendo a série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ *convergente e a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ *divergente conclui-se que sendo* $l=1$ *do corolário 5.3.12 nada se pode concluir quanto à natureza da série.*

Teorema 5.3.15 (Critério integral)**.** *A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)\,,$$

em que f *uma função contínua, decrescente e positiva em* $\{x\in\mathbb{R}:\ \ x\geq 1\}$*, é uma série convergente se e só se existe, em* $\mathbb{R}$*,*

$$\lim_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$$

Demonstração. Como a função f é contínua, decrescente e positiva no intervalo $[k,k+1]$, $k\in\mathbb{N}$, tem-se

$$f(k+1)\leq\int_k^{k+1} f(x)\,dx\leq f(k)$$

Ora considerando $n-1$ desigualdades para $k=1,\ldots,n-1$, e somando termo a termo tem-se

$$s_n-f(1)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-f(1)\leq\int_1^n f(x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=s_{n-1}$$

o que permite obter de imediato o critério integral. ■

Este critério integral permite estabelecer a convergência das séries de Dirichlet. Considerando $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$ em que $f(x)=\frac{1}{x^p}$ tem-se

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx\;=\ln n-\ln 1$$

e se $p\neq 1$

$$\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx\;=\;\frac{1}{1-p}(\frac{1}{n^{p-1}}-1)$$

Assim da existência em $\mathbb{R}$ de $\lim\limits_{m\to+\infty}\int_1^m f(x)\,dx$ conclui-se que as séries de Dirichlet são divergentes se $p\leq 1$ e convergentes se $p>1$.

5.4 Séries absolutamente convergentes

Os critérios de convergência para séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

em que $a_n \geq 0$ permitem analisar evidentemente a convergência das séries $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ em que $b_n = -a_n$, para $n \geq p$ com $p \in \mathbb{N}$. O conceito de série absolutamente convergente, que se introduz nesta secção vai permitir alargar o conjunto das séries cujos critérios de convergência de séries de termos não negativos se podem aplicar.

Definição 5.4.1. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série absolutamente convergente se*

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é uma série convergente;*

e

- $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é uma série convergente.*

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se uma série *simplesmente convergente* se for uma série convergente e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for uma série divergente.

Observação 5.4.2. *Qualquer série convergente que tenha todos os termos com o mesmo sinal é absolutamente convergente. Uma série simplesmente convergente tem infinitos termos positivos e infinitos termos negativos.*
Note-se que muitas das propriedades da adição não são verificadas para as séries simplesmente convergentes mas apenas para as séries absolutamente convergentes.

Teorema 5.4.3. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ *é uma série convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é também uma série convergente tendo-se*

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Demonstração. Convergindo a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, do critério de Cauchy,

$$\forall_{\epsilon>0} \ \exists_{p\in\mathbb{N}} \quad r \geq q > p \ \Rightarrow \ |a_{q+1}| + \ldots + |a_r| < \epsilon$$

Ora como

$$|a_{q+1} + \ldots + a_r| \leq |a_{q+1}| + \ldots + |a_r| \tag{5.4.1}$$

pode concluir-se, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, que

$$|a_{q+1} + \ldots + a_r| < \epsilon$$

o que pelo critério de Cauchy permite concluir a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Finalmente passando ao limite em (5.4.1) tem-se a relação entre as somas das séries indicada. ■

Observação 5.4.4. *Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é uma série divergente, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pode ser convergente ou divergente.*

Exemplo 5.4.5. *Analise-se quanto à convergência a série $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\pi)$, em que $0 < r < 1$.*

Esta série é absolutamente convergente, uma vez que a série do módulos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |r^n \cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{+\infty} |r^n(-1)^n| = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n$$

é uma série geométrica convergente já que $0 < r < 1$.

5.5 A soma de séries

Conhecida a convergência de uma série numérica na prática apenas em casos particulares é fácil o *cálculo da soma da série* por passagem ao limite da sucessão das somas parciais. Em geral opta-se por obter valores aproximados da soma.

Considerando a série convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

do corolário 5.2.6 a série
$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n$$
é uma série convergente designada por resto de ordem p.
Fixando $p \in \mathbb{N}$ o termo de ordem $n+p$ da sucessão das somas parciais da série pode escrever-se

$$s_{n+p} = s_p + (a_{p+1} + \ldots + a_{p+n})$$

Passando ao limite em n tem-se

$$s = s_p + r_p$$

em que r_p, o resto de ordem p, é a soma da série $\sum\limits_{n=p+1}^{+\infty} a_n$. Assim a soma da série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pode ser aproximada por

$$s_p = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

com erro $r_p = s - s_p$.

Vai-se indicar de seguida majorantes para o erro que se comete ao aproximar a soma de séries absolutamente convergentes, cuja convergência foi estabelecida pelo critério da raiz e pelo critério da razão.

- Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ em que $|a_n|^{1/n} \leq r < 1$. Tem-se

  $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + r_p$$

  e
  $$|r_p| = |\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=p+1}^{+\infty} r^n = r^{p+1}.\frac{1}{1-r}.$$

  Assim se $r = 1/2$, $p = 10$ tem-se

  $$|r_{10}| \leq 2^{-11}.\frac{1}{1/2} = 2^{-10} < 0,001$$

- Seja $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq r < 1$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n \qquad\qquad a_n \geq 0.$$

  Tem-se

$$r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \ldots = a_{p+1}\left(1 + \frac{a_{p+2}}{a_{p+1}} + \frac{a_{p+3}}{a_{p+1}} + \ldots\right)$$

  e uma vez que $\dfrac{a_{p+3}}{a_{p+1}} = \dfrac{a_{p+3}}{a_{p+2}}.\dfrac{a_{p+2}}{a_{p+1}}$

$$|r_p| \leq a_{p+1}(1 + r + r^2 + \ldots) \leq \frac{a_{p+1}}{1-r}$$

Exemplo 5.5.1. *Seja*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \stackrel{def}{=} e.$$

em que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} < 1$$

Considerando $p = 5$ *o erro que se comete na aproximação*

$$e \cong 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

é majorado por $0,002$ *já que*

- $\dfrac{1}{1 - 1/(n+1)} = \dfrac{n+1}{n}$

- $a_{p+1} = \dfrac{1}{(p+1)!}$

e consequentemente

$$r_p \leq \frac{7}{6}.\frac{1}{6!} < 0,002$$

5.6 Séries de potências

Definição 5.6.1. *Sendo a_n uma sucessão, chama-se série de potências de $x \in \mathbb{R}$ com coeficientes a_n à série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \,.$$

A série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ identifica-se com um polinómio se todos os coeficientes a_n forem nulos a partir de certa ordem. As séries de potências podem encarar-se como generalizações de polinómios em x: $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.
Designa-se por *domínio de convergência* de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a série é convergente.
Tal como um polinómio define uma função de variável real em $\mathbb{R}$, uma série de potências define uma função no subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a série é convergente, precisamente a função que em cada ponto desse conjunto tem por valor a soma da série no ponto considerado.

Teorema 5.6.2. *Seja a série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ em que existe $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. A série é absolutamente convergente para $x \in]-r, r[$, em que*

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \,.$$

Em $x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$ a série é divergente.

Demonstração. Seja a série $|a_0| + |a_1 x| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$.
Tem-se para $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n||x^n|} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \,.$$

Assim pelo critério da raiz para $x \in \mathbb{R}$ fixo se $|x| \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ a série é absolutamente convergente. Consequentemente sempre que

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

a série é absolutamente convergente i.e. a série de potências é absolutamente convergente para $x \in]-r, r[$.

Se $x \notin [-r, r]$ tem-se $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ é divergente o que leva a concluir que a série dada não é absolutamente convergente. Por outro lado como $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ têm-se infinitos valores de n para os quais $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$ concluindo-se que a sucessão $\tilde{a}_n = a_n x^n$ não tende para zero e consequentemente a série considerada é divergente para $x \in]-\infty, r[\cup]r, +\infty[$.
■

Observação 5.6.3.

- *Designa-se* $]-r, r[$ *por intervalo de convergência e* r *por raio de convergência.*
- *Se* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ *tem-se* $r = 0$ *e a série é divergente excepto em* $x = 0$*. Se* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ *tem-se* $r = +\infty$ *e a série é convergente em* $\mathbb{R}$*.*
- *O teorema anterior esclarece a convergência da série de potências* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *se* $x \neq -r$ *e* $x \neq r$ *extremos do intervalo de convergência. Não existe nenhum resultado geral para* $x = \pm r$*.*

Exemplo 5.6.4. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Tem-se

$$r = \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

Assim se $|x| < 1$ a série é absolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

se $|x| > 1$ a série é divergente.

O domínio de convergência da série de potências $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pode ser obtido também partindo do critério de D'Alembert.

Corolário 5.6.5. *O raio de convergência da série* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$*, sempre que exista o limite de* $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *é dado por:*

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

Demonstração. Como

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

a expressão para r obtém-se de imediato do teorema anterior.
Note-se que directamente, do critério de D'Alembert, se

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

conclui-se que x pertence ao domínio de convergência da série o que permite obter, de modo alternativo, uma expressão para r. ∎

Exemplo 5.6.6. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Do corolário 5.6.5 tem-se para o raio de convergência:

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

Assim a série é absolutamente convergente em $\mathbb{R}$ e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) = exp(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5.6.7. *Analise-se em* $\mathbb{R}$ *a convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots .$$

e determine-se quando possível a sua soma.

Tem-se

$$r = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1.$$

Assim se $|x| < 1$ a série é absolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad x \in]-1, 1[.$$

Se $|x| > 1$ a série é divergente.

Definição 5.6.8. *Sendo a_n uma sucessão de termos reais a série de potências de $x - a$, $a \in \mathbb{R}$, é por definição a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

A série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, converge em x_0 se e só se a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n$, em que $u = x_0 - a$, é convergente. Assim o domínio de convergência da série de potências de $x - a$ pode obter-se a partir do domínio de convergência da série de potências de u. Se $r = +\infty$, o domínio de convergência é $\mathbb{R}$ e se $r = 0$ é $\{a\} = [a, a]$. Para $0 < r < +\infty$ o domínio de convergência contém $]a - r, a + r[$ e está contido em $[a - r, a + r]$ sendo a convergência absoluta em qualquer ponto do primeiro intervalo.

Exemplo 5.6.9. *Determine-se o intervalo em que a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-3)^n$$

é absolutamente convergente.

Tem-se

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2n+3}{2n+1} \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

A série é absolutamente convergente no intervalo aberto $]2, 4[$ sendo em $]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$ divergente.

Exemplo 5.6.10. *Determine-se, se possível a soma da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)(x-2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(x-2)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(x-2)^n$$

Uma vez que os raios de convergência das séries parcelas são repectivamente

$$r_1=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}}\right|=1 \quad \text{e} \quad r_2=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=+\infty$$

a série é absolutamente convergente em

$$-1<x-2<1 \;\Leftrightarrow\; 1<x<3 \;\Leftrightarrow\; x\in]1,3[$$

- Em $x=1$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n!}\right)$ é divergente.
- Em $x=3$, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\dfrac{1}{n!}\right)$ é divergente.

Finalmente determinando a soma no domínio de convergência tem-se:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{n!}\right)(x-2)^n=\frac{1}{x-1}+e^{x-2}, \qquad x\in]1,3[.$$

5.7 Exercícios

5.7.1 Exercícios resolvidos

Exerc 5.7.1. *Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine a soma de uma delas*

$$i)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}} \qquad\qquad ii)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3-e^n}{3^n}$$

Resolução.

i) Sejam as sucessões $a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $b_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ com o mesmo comportamento quando $n\to+\infty$. Tem-se

$$\lim\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}}{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}}}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^2}}}=1\in\mathbb{R}^+,$$

Do critério de comparação as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ têm a mesma natureza. Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}$ é uma série de Dirichlet divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+5}}$ é também divergente.

ii) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n}$ é uma série convergente pois é a adição de duas séries geométricas convergentes $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n$

A soma da série é obtida a partir da soma das anteriores séries geométricas

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3-e^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} - \frac{e/3}{1-e/3} = 3/2 - \frac{e}{3-e}$$

■

Exerc 5.7.2. *Analise a natureza das séries numéricas*

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + n^{7/2}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi).$$

Resolução.

i) Seja

$$\frac{\sqrt{n}}{n^3 + n^{\frac{7}{2}}} < \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{7}{2}}} = \frac{1}{n^3}$$

Do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+n^{\frac{7}{2}}}$ é convergente, uma vez que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série Dirichlet convergente, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p > 1$.

ii) Seja $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{n!}{n^n} \cos(n\pi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.
Tem-se

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} . \frac{n^n}{n!} = \lim \frac{n!(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)n!} = \lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

Assim pelo critério de D'Alembert a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^n}$ é convergente e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cos(n\pi)$ é uma série absolutamente convergente.

■

Exerc 5.7.3.

Determine, se possível, o valor da soma das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$$

Resolução.

i) A série

$$2e\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{e})^n$$

é uma série geométrica convergente uma vez que tem razão inferior a um (2/e). O valor da sua soma é:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{e^{n-1}} = 2e\frac{2/e}{1-2/e} = \frac{4e}{e-2}$$

ii) A série não satisfaz a condição necessária da convergência de séries já que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n^2} = 1 \neq 0$$

consequentemente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+n^2}$ é uma série divergente não tendo soma.

■

Exerc 5.7.4.

Analise a natureza das séries

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n})\right)$$

Resolução.

i) Tem-se

$$\frac{3^n}{1+3^{2n}} \leq \frac{3^n}{3^{2n}} = \frac{1}{3^n}$$

Ora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n$$

é uma série geométrica convergente consequentemente, do critério geral de comparação a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$ é uma série convergente.

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

é uma série divergente, já que do critério de D'Alembert:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{2^n n!}} = \frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n} \frac{2^n n!}{22^n(n+1)n!}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n})^n = \frac{e}{2} > 1.$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\cos(\frac{\pi}{n+1}) - \cos(\frac{\pi}{n}) \right) \quad \text{é uma série de Mengoli convergente}$$

já que é um caso particular da classe de séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - a_{n+1})$ com a sucessão $a_n = \cos(\frac{\pi}{n+1})$ convergente.

■

Exerc 5.7.5.

Considere a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

i) A série é absolutamente convergente? Justifique.

ii) A sucessão

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

é convergente? Justifique.

Resolução.

i) Seja

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

e as sucessões

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

e as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, do critério de comparação, têm a mesma natureza. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente e consequentemente $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é uma série convergente.

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$ é pois absolutamente convergente.

ii)

$$\text{Como} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}} \quad \text{é uma série absolutamente convergente}$$

é uma série convergente. Assim a sucessão das somas parciais

$$u_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{5}} - ... + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^3\sqrt{n^2+1}}$$

é uma sucessão convergente.

■

Exerc 5.7.6.

Analise a natureza das séries numéricas indicadas e determine o valor da soma de uma delas.

$$i) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} \qquad ii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \qquad iii) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

Resolução.

i) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-(2n+1)} = 1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n$$

é uma série geométrica de termos positivos convergente uma vez que tem razão inferior a um (1/9). O valor da sua soma é :

$$1/3 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{9})^n = 1/3 \frac{1/9}{1-1/9} = \frac{1}{24}$$

ii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n}$$

é uma série convergente pelo critério de comparação já que para as sucessões com o mesmo comportamento quando $n \to +\infty$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^4+n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^{\frac{7}{2}}}$$

se tem

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet convergente.

iii) A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{1+e^n}$$

é uma série convergente pelo critério de D'Alembert.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{1+e^{n+1}}}{\frac{n^2}{1+e^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1/e^{n+1}+1/e}{1/e^{n+1}+1} = \frac{1}{e} < 1$$

■

Exerc 5.7.7. *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3}$$

i) Indique o maior intervalo aberto onde a série é absolutamente convergente

ii) Determine no intervalo indicado em i) a soma da série.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{3^n.5^{n+2}}{5^{n+1}.3^{n+1}} = \frac{5}{3}$$

Assim série converge absolutamente se $|1-2x| < 5/3$. O maior intervalo aberto onde a série de potências é absolutamente convergente é: $]-1/3, 4/3[$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} (1-2x)^{n+3} = \frac{(1-2x)^3}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3-6x}{5}\right)^n = \frac{(1-2x)^3}{5} \frac{\frac{3-6x}{5}}{1-\frac{3-6x}{5}} = \frac{(1-2x)^4}{5+15x}$$

■

Exerc 5.7.8. *Determine o intervalo de* $\mathbb{R}$ *onde é convergente a série de potências*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^2} (x-1)^{n+2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução. Tem-se para o raio de convergência

$$r = \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim \frac{\frac{1}{2^n n^2}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^2}} = 2$$

Assim a série converge absolutamente se $|x-1| < 2$ i.e. se $x \in]-1, 3[$.
Para $x = -1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente. Para $x = 3$, a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |\frac{(-1)^n}{n^2}| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente.
Em conclusão a série de potências converge absolutamente para $x \in [-1, 3]$.
■

5.7.2 Enunciados de exercícios

Exerc 5.7.9. *Analise a natureza das séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n(1-2^n)}\,; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{1+n!}$$

Exerc 5.7.10. *Considere as séries numéricas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n n^5}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2(n+1)}} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2n}}{(1+e^2)^n}$$

i) As séries são convergentes? Justifique.

ii) Determine a soma de uma delas.

Exerc 5.7.11. *Seja a sucessão a_n de termos reais não nulos convergente para $a \neq 0$. A série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} + a_n)$$

é convergente? Justifique.

Exerc 5.7.12. *Sendo $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - 1)$ uma série de termos positivos convergente, qual a natureza da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 - 1}{4 + a_n}$$

Justifique.

Exerc 5.7.13. *Considere a série de potências*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2 2^{n-1}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Indique o maior intervalo aberto de $\mathbb{R}$ em que a série é absolutamente convergente.

Exerc 5.7.14. *Considere a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 5^{-n}(x-1)^{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) Determine o intervalo de $\mathbb{R}$, onde a série é absolutamente convergente.

ii) Determine a soma da série quando $x = 3$.

Exerc 5.7.15. *Considere a série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+2}}(x+3)^{n+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

i) Indique o intervalo de convergência da série.

ii) Indique a soma da série no intervalo de convergência indicado.

Exerc 5.7.16. *Determine o intervalo de $\mathbb{R}$ onde é convergente a série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} (x+2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bibliografia

[1] J. Campos Ferreira, Introdução à Análise Matemática, Fundação Gulbenkian, 8a ed., 2005.

[2] W. Trench, Introduction to Real Analysis, Trinity University, 2003.

[3] A. Ferreira dos Santos, Análise Matemática I e II, Texto de apoio às aulas, AEIST, 1994-95.