Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - B - (MEMec; MEAer)

19 de Novembro de 2009 - 19 horas

I(6 val.)

1. Considere a sucessão definida por

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

i) Mostre por indução matemática que u_n com termos em $[2,3]$ é uma sucessão decrescente.

ii) A sucessão u_n é convergente? Justifique

iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}}$$

2. A sucessão w_n de termos positivos tal que $w_{n+1}/w_n \geq 1, \ n \in \mathbb{N}$ pode ter como sublimite zero? Justifique.

II (14 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left((1+e^{-x})^{-1}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ \\ e^{1/(4-x^2)} \quad \text{se} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad x \neq 2 \end{cases}$$

i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

ii) Defina a função derivada de f.

iii) Em $\mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$ a função é monótona? Tem extremos? Justifique.

iv) O gráfico da função f em $\mathbb{R}^+ \setminus \{2\}$ tem assimptota? Escreva, se existir, a sua equação.

v) Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ que aproxima a função f em $[-5/4, -3/4]$.

2. Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem, os seguintes limites

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1/x^2), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^x}{x\ln x}.$$

3. Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$.

   i) Supondo que f é estritamente crescente analise a existência de máximos em $]a,b[$ da função composta $h = g \circ f$, em que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$. Determine, caso exista, o valor de um possível máximo da função h em $]a,b[$.

   ii) Mostre que se $f(a) = f(b) = 1$ e se a equação $f'(x) = 0$ tem uma só solução em $]a,b[$ então a equação $f(x) = 1$ não tem soluções em $]a,b[$.