Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste - A - (MEMec; MEAer)

19 de Novembro de 2009 - 19 horas

I(6 val.)

1. Considere a sucessão definida por

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = 1 - \frac{1}{5}u_n^2 \qquad n \in \mathbb{N}.$$

   i) Mostre por indução matemática que $|u_n| \leq 2 \quad , n \in \mathbb{N}$.

   ii) A sucessão u_n é contractiva? Justifique.

   iii) Determine o limite da sucessão convergente

$$v_n = u_n + \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

2. Qualquer subsucessão de uma sucessão estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é majorado é convergente em $\mathbb{R}$? Justifique

II (14 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left((1+e^{-x})^{-1}\right) & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 e^{4-x^2} & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

   i) A função f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

   ii) Defina a função derivada de f.

   iii) Em $\mathbb{R}^+$ a função é monótona? Tem extremos? Justifique.

   iv) O gráfico da função f em $\mathbb{R}^+$ tem assimptota? Escreva, se existir, a sua equação.

   v) Indique o polinómio de Taylor do 2º grau em potências de $x+1$ que aproxima a função f em $[-5/4, -3/4]$.

2. Determine em $\overline{\mathbb{R}}$, se existirem, os seguintes limites

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg}(1/x), \qquad \lim_{x\to+\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}.$$

3. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

   i) Supondo que f é estritamente crescente analise a existência de máximos em $]a, b[$ da função composta $h = g \circ f$, em que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$. Determine, caso exista, o valor de um possível máximo da função h em $]a, b[$.

   ii) Se $f(a) = f(b) = 1$ e em $]a, b[$ a equação $f'(x) = 0$ tem n soluções x_i, $i = 1, ..., n$, em que $f(x_i) \neq 1$, qual é o número de soluções da equação $f(x) = 1$ em $]a, b[$? Justifique.